КЛАССИЧЕСКАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

ПО МАТЕМАТИКЕ

Н. В. КОПЧЕНОВА,
И. А. МАРОН

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Издание третье,
стереотипное

РЕКОМЕНДОВАНО
Научно-методическим советом
по математике Министерства образования и науки
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов вузов, обучающихся по направлениям
510000 — «Естественные науки и математика»,
550000 — «Технические науки»,
540000 — «Педагогические науки»

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2009

ББК 22.19я73
К 55

Копченова Н. В., Марон И. А.

К 55 Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 368 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0801-6

Учебное пособие представляет собой руководство к решению задач по вычислительной математике.

В книге содержатся сведения о правилах приближенных вычислений, вычислении значений функций, приближенном решении систем линейных и нелинейных уравнений, интерполировании, приближенном дифференцировании и интегрировании, приближенном решении дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), приближенном решении интегральных уравнений.

Все параграфы содержат краткие теоретические сведения, подробное решение типовых примеров и задачи для самостоятельного решения. Для большинства таких задач приведены ответы.

Учебное пособие предназначено для студентов технических и экономических университетов и вузов. Может быть полезна также научным работникам в области технических и экономических наук.

ББК 22.19я73

Рецензенты:

Н. С. ЧЕКАЛКИН — зав. кафедрой высшей математики МИРЭА, к. ф.-м. н., профессор; *В. Ю. ПРИХОДЬКО* — д. ф.-м. н., профессор кафедры высшей математики МИРЭА

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА IV

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА V

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

ГЛАВА VI

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

ГЛАВА VII

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

ГЛАВА VIII

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА IX

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА X

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Разумное использование современной вычислительной техники немыслимо без умелого применения приближенного и численного анализа. Этим объясняется чрезвычайно возросший интерес к методам приближенных вычислений.

Вычислительная математика как учебная дисциплина занимает все большее место в учебных планах технических и экономических вузов. В связи с этим возросла потребность в издании учебных пособий по этой дисциплине. Особенно острая необходимость ощущается в руководствах к решению задач по вычислительной математике.

Настоящая книга и является попыткой создания такого руководства.

Книга имеет следующую структуру. В начале каждого параграфа даются сжатые теоретические сведения: постановка задачи, рабочие формулы, вычислительные схемы, оценки погрешности, сравнение отдельных методов с точки зрения их трудоемкости, достигаемой степени точности, удобства реализации на ЭВМ и т. п. Далее приводится подробное решение типовых примеров, на которых иллюстрируются соответствующие алгоритмы. В конце параграфа предлагаются задачи для самостоятельных упражнений. Почти все они снабжены ответами.

В целях лучшего понимания сути дела бо́льшая часть приведенных с решениями примеров подобраны так, чтобы вычисления не были особенно громоздкими. Предполагается, что на начальной ступени обучения, на групповых занятиях будут использованы настольные вычислительные машины.

Книга предназначена для студентов технических вузов. Она может оказаться полезной также студентам экономических вузов, инженерам, аспирантам и научным сотрудникам, работающим в области прикладных наук. Подчеркнем, что материал, выходящий за рамки программы курса вычислительной математики для втузов, не нашел отражения в настоящем учебном руководстве.

Авторы выражают глубокую благодарность Х. Л. Смолицкому и И. М. Стесину за помощь при подготовке материалов учебного пособия. Их советы и замечания способствовали улучшению книги. Авторы также искренне признательны Л. З. Румшинскому за участие в создании книги и за сотрудничество при написании первой и шестой глав.

Авторы

ГЛАВА I

ПРАВИЛА ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

§ 1. Приближенные числа, их абсолютные и относительные погрешности

Расчеты, как правило, производятся с приближенными значениями величин — *приближенными числами*. Уже исходные данные для расчета обычно даются с некоторыми погрешностями; в процессе расчета еще накапливаются погрешности от округления, от применения приближенных формул и т. п. Разумная оценка погрешности при вычислениях позволяет указать оптимальное количество знаков, которые следует сохранять при расчетах, а также в окончательном результате.

Погрешность приближенного числа a, т. е. разность $a-a_0$ между ним и точным значением a_0, обычно неизвестна.

Под *оценкой погрешности* приближенного числа a понимают установление неравенства вида

$$|a-a_0| \leqslant \Delta_a. \tag{1.1}$$

Число Δ_a называется *абсолютной погрешностью приближенного числа a* (иногда употребляют термин «предельная абсолютная погрешность»). Это число определяется неоднозначно: его можно увеличить. Обычно стараются указать возможно меньшее число Δ_a, удовлетворяющее неравенству (1.1).

Абсолютные погрешности записывают не более чем с двумя-тремя значащими цифрами (при подсчете числа значащих цифр не учитывают нулей, стоящих слева; например, в числе 0,010030 имеется 5 значащих цифр). В приближенном числе a не следует сохранять те разряды, которые подвергаются округлению в его абсолютной погрешности Δ_a.

Пример 1.1. Длина и ширина комнаты, измеренные с точностью до 1 *см*, равны $a=5{,}43$ *м* и $b=3{,}82$ *м*. Оценить погрешность в определении площади комнаты $S=ab=20{,}7426$ *м*^{2}.

Решение. По условию задачи $\Delta_a = 0{,}01$ *м*, $\Delta_b = 0{,}01$ *м*. Крайние возможные значения площади равны

$$(a+0{,}01)(b+0{,}01) = 20{,}8352 \text{ м}^2,$$
$$(a-0{,}01)(b-0{,}01) = 20{,}6502 \text{ м}^2;$$

сравнивая их с подсчитанным выше значением S, получаем оценку

$$|S - S_0| \leqslant 0{,}0926,$$

что дает возможность указать абсолютную погрешность числа S в виде $\Delta_S = 0{,}0926$ *м*^{2}.

Здесь разумно округлить значение Δ_S, например, так: $\Delta_S = 0{,}093$ *м*^{2} или $\Delta_S = 0{,}10$ *м*^{2} (абсолютные погрешности округляют в бо́льшую сторону!). При этом приближенное значение площади можно записать в виде $S = 20{,}743$ *м*^{2}, или $S = 20{,}74$ *м*^{2}, или даже $S = 20{,}7$ *м*^{2}.

Пример 1.2. В некоторую вычислительную машину мы можем ввести числа только с тремя значащими цифрами. С какой точностью мы можем ввести в нее числа π и $1/3$?

Решение. Полагаем $\pi \approx 3{,}14 = a$ вместо $\pi = 3{,}141592\ \ldots$, погрешность числа a можно оценить числом $\Delta_a = 0{,}0016$. Полагаем $1/3 \approx 0{,}333 = b$; погрешность числа b можно оценить числом $\Delta_b = 0{,}00034$ или $\Delta_b = 0{,}0004$.

Относительной погрешностью δ_a *приближенного числа* a называется отношение его абсолютной погрешности Δ_a к абсолютной величине числа a, т. е.

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \quad (a \neq 0). \tag{1.2}$$

Относительная погрешность обычно выражается в процентах, и ее принято записывать не более чем с двумя-тремя значащими цифрами (знаками).

Иногда под относительной погрешностью понимают отношение $\frac{\Delta_a}{|a_0|}$, где a_0 — точное (но неизвестное!) значение числа; если относительная погрешность числа a не превышает 5%, то различие между отношениями $\frac{\Delta_a}{|a|}$ и $\frac{\Delta_a}{|a_0|}$ сказывается только на втором знаке погрешности, что не существенно.

Пример 1.3. Определить относительную погрешность числа S в примере 1.1.

Решение. $S = 20{,}7426$, $\Delta_S = 0{,}0926$, поэтому

$$\delta_S = \frac{0{,}0926}{20{,}7426} = \frac{926}{207\,426} = 0{,}0045 = 0{,}45\%.$$

Во многих технических приложениях принято характеризовать точность приближенных чисел их относительной погрешностью.

Относительная погрешность приближенного числа связана с количеством его верных знаков. *Количество верных знаков* числа отсчитывается от первой значащей цифры числа до первой значащей цифры его абсолютной погрешности: например, число $S=20{,}7426$ с абсолютной погрешностью $\Delta_S=0{,}0926$ имеет три верных знака (2, 0, 7); остальные знаки — сомнительные.

Ориентировочно можно считать, что наличие только одного верного знака соответствует относительной погрешности порядка 10%, двух верных знаков — погрешности порядка 1%, трех верных знаков — погрешности порядка 0,1% и т. д.

В математических таблицах все числа округлены до верных знаков, причем абсолютная погрешность не превосходит половины единицы последнего оставленного разряда. Например, если в таблице указано $e=2{,}718$, то абсолютная погрешность не превосходит $0{,}5\cdot 10^{-3}$.

В окончательных результатах вычислений обычно оставляют, кроме верных, один сомнительный знак.

В промежуточных результатах вычислений обычно сохраняют два-три сомнительных знака, чтобы не накапливать лишних погрешностей от округлений.

Пример 1.4. Округлить число $S=20{,}7426$ в примере 1.1 до верных знаков.

Решение. Так как в числе S три верных знака, то естественно записать

$$S=20{,}7.$$

Однако при этом к абсолютной погрешности $\Delta_S=0{,}0926$ приходится добавить еще величину 0,0426, отброшенную при округлении. Новая абсолютная погрешность $\Delta_S=0{,}136$ заставляет считать сомнительным уже третий знак числа S, и, следовательно, число S приходится округлять до **двух** знаков:

$$S=21 \qquad (\Delta_S=0{,}44<0{,}5).$$

Этот пример показывает, что округление результатов расчета до верных знаков не всегда целесообразно.

Примечание. В этом примере, как это обычно принято, применено *правило дополнения при округлении*: если первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на 1.

ЗАДАЧИ

1. Округляя следующие числа до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ погрешности полученных приближенных чисел.

а) 2,1514, б) 0,16152, в) 0,01204, г) 1,225, д) —0,0015281, е) —392,85, ж) 0,1545, з) 0,003922, и) 625,55, к) 94,525.

2. Определить абсолютную погрешность следующих приближенных чисел по их относительным погрешностям.

а) $a=13267$, $\delta=0{,}1\%$, б) $a=2{,}32$, $\delta=0{,}7\%$, в) $a=35{,}72$, $\delta=1\%$, г) $a=0{,}896$, $\delta=10\%$, д) $a=232{,}44$, $\delta=1\%$.

3. При измерении некоторых углов получили числа $\alpha_1 = 21°37'3''$, $\alpha_2 = 45°$, $\alpha_3 = 1°10''$, $\alpha_4 = 75°20'44''$.

Определить относительные погрешности чисел α_1, α_2, α_3, α_4, полагая абсолютную погрешность измерения равной $1''$.

4. Определить количество верных знаков в числе x, если известна его абсолютная погрешность.

а) $x = 0{,}3941$, $\Delta_x = 0{,}25\cdot 10^{-2}$, б) $x = 0{,}1132$, $\Delta_x = 0{,}1\cdot 10^{-3}$, в) $x = 38{,}2543$, $\Delta_x = 0{,}27\cdot 10^{-2}$, г) $x = 293{,}481$, $\Delta_x = 0{,}1$, д) $x = 2{,}325$, $\Delta_x = 0{,}1\cdot 10^{-1}$, е) $x = 14{,}00231$, $\Delta_x = 0{,}1\cdot 10^{-3}$, ж) $x = 0{,}0842$, $\Delta_x = 0{,}15\cdot 10^{-2}$, з) $x = 0{,}00381$, $\Delta_x = 0{,}1\cdot 10^{-4}$, и) $x = -32{,}285$, $\Delta_x = 0{,}2\cdot 10^{-2}$, к) $x = -0{,}2113$, $\Delta_x = 0{,}5\cdot 10^{-2}$.

5. Определить количество верных знаков в числе a, если известна его относительная погрешность.

а) $a = 1{,}8921$, $\delta_a = 0{,}1\cdot 10^{-2}$, б) $a = 0{,}2218$, $\delta_a = 0{,}2\cdot 10^{-1}$, в) $a = 22{,}351$, $\delta_a = 0{,}1$, г) $a = 0{,}02425$, $\delta_a = 0{,}5\cdot 10^{-2}$, д) $a = 0{,}000135$, $\delta_a = 0{,}15$, е) $a = 9{,}3598$, $\delta_a = 0{,}1\%$, ж) $a = 0{,}11452$, $\delta_a = 10\%$, з) $a = 48361$, $\delta_a = 1\%$, и) $a = 592{,}8$, $\delta_a = 2\%$, к) $a = 14{,}9360$, $\delta_a = 1\%$.

§ 2. Сложение и вычитание приближенных чисел

1. *Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых:* если

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

то

$$\Delta_S = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n}. \tag{2.1}$$

При большом количестве слагаемых оценка абсолютной погрешности суммы по формуле (2.1) оказывается сильно завышенной, так как обычно происходит частичная компенсация погрешностей разных знаков. Если все слагаемые округлены до m-го десятичного разряда, т. е. их погрешности оцениваются величиной $0{,}5\cdot 10^{-m}$, то *статистическая оценка* абсолютной погрешности суммы дается *правилом Чеботарева*:

$$\Delta_S = \sqrt{3n}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-m}, \tag{2.2}$$

где n — число слагаемых; это правило применяют при $n > 10$.

Если среди слагаемых имеется одно число, абсолютная погрешность которого значительно превосходит абсолютные погрешности остальных слагаемых, то абсолютная погрешность суммы считается равной этой наибольшей погрешности. При этом в сумме целесообразно сохранять столько десятичных знаков, сколько их в слагаемом с наибольшей абсолютной погрешностью.

Покажем на примере, как производится сложение приближенных чисел и оценка погрешности.

Пример 2.1. Найти сумму приближенных чисел 0,348; 0,1834; 345,4; 235,2; 11,75; 9,27; 0,0849; 0,0214; 0,000354, считая в них все знаки верными, т. е. считая, что абсолютная погрешность каждого слагаемого не превосходит половины единицы младшего оставленного разряда.

Решение. Наибольшую абсолютную погрешность $\Delta = 0{,}05$ имеют два числа: 345,4 и 235,2. Поэтому можно считать, что абсолютная погрешность суммы составляет $2\Delta = 0{,}10$. Так как количество слагаемых невелико, то в расчетах сохраняем только один запасной знак, т. е. округляем слагаемые до 0,01:

$$\begin{array}{r}
345{,}4 \\
235{,}2 \\
11{,}75 \\
9{,}27 \\
0{,}35 \\
0{,}18 \\
0{,}08 \\
0{,}02 \\
0{,}00 \\
\hline
S = 602{,}25.
\end{array}$$

В окончательном результате запасной знак отбрасываем:

$$S = 602{,}2.$$

При этом к указанной выше абсолютной погрешности 0,10 добавляем погрешность округления 0,05, что дает

$$\Delta_S = 0{,}15 \text{ или } \Delta_S = 0{,}2.$$

Заметим, что в этом примере полный учет всех погрешностей слагаемых по формуле (2.1) только усложнил бы расчет, не внося существенных уточнений в результат.

2. *Относительная погрешность δ_S суммы нескольких чисел одного и того же знака заключена между наименьшей и наибольшей из относительных погрешностей слагаемых:*

$$\min \delta_{a_k} \leqslant \delta_S \leqslant \max \delta_{a_k} \qquad (a_k > 0,\ k = 1, 2, \cdots, n). \tag{2.3}$$

Пример 2.2. Оценить относительную погрешность суммы чисел в примере 2.1 и сравнить ее с относительными погрешностями слагаемых.

Решение. Относительная погрешность суммы S равна

$$\delta_S = \frac{0{,}10}{602{,}25} = 0{,}017\,\%.$$

Относительные погрешности слагаемых составляют соответственно

$$\frac{0{,}5}{348} = 0{,}15\,\%; \qquad \frac{0{,}5}{1834} = 0{,}027\,\%; \qquad \frac{0{,}5}{3454} = 0{,}015\,\%;$$

$$\frac{0{,}5}{2352} = 0{,}022\,\%; \qquad \frac{0{,}5}{1175} = 0{,}043\,\%; \qquad \frac{0{,}5}{927} = 0{,}054\,\%;$$

$$\frac{0{,}5}{849} = 0{,}059\,\%; \qquad \frac{0{,}5}{214} = 0{,}24\,\%; \qquad \frac{0{,}5}{354} = 0{,}15\,\%.$$

Замечаем, что наибольший вклад в сумму дают слагаемые 345,4 и 235,2 с относительными погрешностями 0,015% и 0,022% и что относительная погрешность суммы заключена как раз между этими числами.

3. *Относительная погрешность разности двух положительных чисел больше относительных погрешностей этих чисел,* особенно если эти числа близки между собой (т. е. если их разность мала по сравнению с самими этими числами). Это приводит к *потере точности при вычитании близких чисел,* что следует учитывать при выборе вычислительных схем.

Пример 2.3. Даны числа $a=1{,}137$ и $b=1{,}073$ с абсолютными погрешностями $\Delta_a=\Delta_b=0{,}011$. Оценить погрешность их разности $c=a-b$.

Решение.

$$c=0{,}064,\quad \Delta_c=\Delta_a+\Delta_b=0{,}022,\quad \delta_c=\frac{22}{64}=35\%.$$

Таким образом, в результате нет ни одного верного знака, хотя сами числа имеют относительные погрешности

$$\delta_a\approx\delta_b\approx 1\%.$$

Пример 2.4. Вычислить $1-\cos 1^\circ$ с помощью четырехзначных таблиц тригонометрических функций и оценить погрешность результата.

Решение. Если взять $\cos 1^\circ$ непосредственно из таблиц, то мы получим

$$a=\cos 1^\circ=0{,}9998,\qquad \Delta_a=0{,}00005$$

и

$$b=1-\cos 1^\circ=0{,}0002,\qquad \Delta_b=0{,}00005,$$

что дает относительную погрешность $\delta_b=\frac{0{,}5}{2}=25\%$.

Преобразуем формулу для вычисления b:

$$b=1-\cos 1^\circ=2\sin^2 0^\circ 30'.$$

По тем же таблицам находим

$$c=\sin 0^\circ 30'=0{,}0087,\qquad \Delta_c=0{,}00005,\qquad \delta_c=\frac{0{,}5}{87}=0{,}58\%,$$

$$b=2c^2=0{,}000151,\qquad \delta_b=\delta_{c^2}=2\delta_c=1{,}16\%\ \text{(см. § 3)},$$

и, следовательно,

$$\Delta_b=b\delta_b=0{,}000151\cdot 0{,}0116=0{,}0000018.$$

Таким образом, указанное преобразование позволило вычислить искомое число b с двумя верными знаками и уменьшить его относительную погрешность более чем в 20 раз!

ЗАДАЧИ

1. Найти суммы приближенных чисел и указать их погрешности.

а) $0{,}145+321+78{,}2$ (все знаки верные), б) $0{,}301+193{,}1+11{,}58$ (все знаки верные), в) $398{,}5-72{,}28+0{,}34567$ (все знаки верные), г) $x_1+x_2-x_3$, где $x_1=197{,}6$, $\Delta_{x_1}=0{,}2$, $x_2=23{,}44$, $\Delta_{x_2}=0{,}22$, $x_3=201{,}55$, $\Delta_{x_3}=0{,}17$.

§ 3. Умножение и деление приближенных чисел

1. *При умножении и делении приближенных чисел складываются их относительные погрешности* (а не абсолютные!); *относительная погрешность выражения*

$$r=\frac{a_1a_2\ldots a_m}{b_1b_2\ldots b_n} \tag{3.1}$$

оценивается величиной

$$\delta_r=\delta_{a_1}+\delta_{a_2}+\ldots+\delta_{a_m}+\delta_{b_1}+\delta_{b_2}+\ldots+\delta_{b_n}. \tag{3.2}$$

При большом числе $m+n$ выгоднее пользоваться *статистической оценкой*, учитывающей частичную компенсацию погрешностей разных знаков: если все числа a_i, b_j $(i=1, 2, \ldots, m; j=1, 2, \ldots, n)$ имеют примерно одинаковую относительную погрешность δ, то относительная погрешность выражения (3.1) принимается равной

$$\delta_r=\sqrt{3(n+m)}\,\delta \qquad (n+m>10). \tag{3.3}$$

Если у одного из чисел a_i, b_j относительная погрешность значительно превышает относительные погрешности остальных чисел, то относительная погрешность выражения (3.1) считается равной этой наибольшей погрешности. При этом в результате целесообразно сохранять столько знаков (значащих цифр), сколько их в числе с наибольшей относительной погрешностью.

2. *Абсолютная погрешность выражения* (3.1) *вычисляется по его относительной погрешности:*

$$\Delta_r=|r|\,\delta_r.$$

Покажем на примере, как производится умножение и деление приближенных чисел и оценка погрешности результата.

Пример 3.1. Вычислить выражение

$$r=\frac{3{,}2\cdot356{,}7\cdot0{,}04811}{7{,}1948\cdot34{,}56},$$

считая, что все числа даны с верными знаками, т. е. что их абсолютные погрешности не превосходят половины единицы младшего оставленного разряда.

Решение. Наибольшую относительную погрешность имеет число $a=3{,}2$, которое содержит всего два верных знака (против четырех-пяти верных знаков в остальных числах):

$$\delta_a=\frac{0{,}5}{32}=1{,}6\%.$$

Поэтому можно считать, что относительная погрешность результата составляет $\delta_r = 1{,}6\%$, т. е. что результат содержит не более двух верных знаков. Так как количество данных чисел невелико, то в расчетах сохраняем один запасной знак, округляя все числа до трех знаков:

$$r = \frac{3{,}2 \cdot 357 \cdot 0{,}0481}{7{,}19 \cdot 34{,}6} = 0{,}221$$

(этот результат можно получить на счетной линейке, поскольку бóльшая точность не требуется!).

Абсолютную погрешность результата вычисляем по его относительной погрешности и найденному численному значению:

$$\Delta_r = r\delta_r = 0{,}221 \cdot 0{,}016 = 0{,}0036.$$

Округляя результат до верных знаков, отбрасываем запасной знак и получаем

$$r = 0{,}22$$

с абсолютной погрешностью $\Delta_r < 0{,}005$.

ЗАДАЧИ

1. Найти произведения приближенных чисел и указать их погрешности (считая в исходных данных все знаки верными).

а) $3{,}49 \cdot 8{,}6$, б) $25{,}1 \cdot 1{,}743$, в) $0{,}02 \cdot 16{,}5$, г) $0{,}253 \cdot 654 \cdot 83{,}6$, д) $1{,}78 \cdot 9{,}1 \cdot 1{,}183$, е) $482{,}56 \cdot 7256 \cdot 0{,}0052$.

2. Найти частное приближенных чисел.

а) $5{,}684 : 5{,}032$, б) $0{,}144 : 1{,}2$, в) $216 : 4$, г) $726{,}676 : 829$, д) $754{,}9367 : 36{,}5$, е) $7{,}3 : 4491$.

3. Стороны прямоугольника равны $(4{,}02 \pm 0{,}01)$ *м*, $(4{,}96 \pm 0{,}01)$ *м*. Вычислить площадь прямоугольника.

4. Катеты прямоугольного треугольника равны $(12{,}10 \pm 0{,}01)$ *см*, $(25{,}21 \pm 0{,}01)$ *см*. Вычислить тангенс угла, противолежащего первому катету.

5. При измерении радиуса R круга с точностью до 0,5 *см* получилось число 12 *см*. Найти абсолютную и относительную погрешности при вычислении площади круга.

6. Каждое ребро куба, измеренное с точностью до 0,02 *см*, оказалось равным 8 *см*. Найти абсолютную и относительную погрешности при вычислении объема куба.

7. Высота h и радиус основания R цилиндра измерены с точностью до 0,5%. Какова предельная относительная погрешность при вычислении объема цилиндра?

§ 4. Погрешности вычисления значений функции

1. Функции одной переменной. Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x)$, вызываемая достаточно малой погрешностью аргумента Δ_x, оценивается величиной

$$\Delta_y = |f'(x)|\,\Delta_x. \qquad (4.1)$$

Если значения функции $f(x)$ положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta_y = \frac{|f'(x)|}{f(x)} \Delta_x = |[\ln f(x)]'| \Delta_x. \tag{4.2}$$

В частности, для основных элементарных функций получаем следующие правила.

а) Степенная функция $y = x^a$. Абсолютная погрешность степенной функции равна

$$\Delta_y = a x^{a-1} \Delta_x. \tag{4.3}$$

Относительная погрешность степенной функции равна

$$\delta_y = |a| \delta_x. \tag{4.4}$$

Например, относительная погрешность квадрата x^2 вдвое больше относительной погрешности основания x, относительная погрешность квадратного корня $\sqrt{x}$ вдвое меньше относительной погрешности подкоренного числа x, относительная погрешность обратной величины $1/x$ равна относительной погрешности самого числа x.

б) Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0)$. Абсолютная погрешность показательной функции равна

$$\Delta_y = a^x \ln a \cdot \Delta_x. \tag{4.5}$$

Относительная погрешность показательной функции равна

$$\delta_y = \Delta_x \ln a. \tag{4.6}$$

Заметим, что здесь относительная погрешность функции пропорциональна абсолютной погрешности аргумента.

Для функции $y = e^x$ отсюда получаем

$$\delta_y = \Delta_x. \tag{4.7}$$

в) Логарифмическая функция $y = \ln x$. Абсолютная погрешность натурального логарифма числа равна относительной погрешности самого числа:

$$\Delta_y = \frac{1}{x} \Delta_x = \delta_x. \tag{4.8}$$

Для десятичного логарифма $y = \lg x$ имеем

$$\Delta_y = 0{,}4343 \delta_x, \tag{4.9}$$

откуда следует, что при расчетах с числами, имеющими m верных знаков, надо пользоваться $(m+1)$-значными таблицами логарифмов.

г) Тригонометрические функции. Абсолютные погрешности синуса и косинуса не превосходят абсолютных погрешностей аргумента:

$$\Delta_{\sin x} = |\cos x|\,\Delta_x \leqslant \Delta_x, \qquad \Delta_{\cos x} = |\sin x|\,\Delta_x \leqslant \Delta_x. \tag{4.10}$$

Абсолютная погрешность тангенса и котангенса всегда больше абсолютной погрешности аргумента:

$$\Delta_{\mathrm{tg}\, x} = (1 + \mathrm{tg}^2 x)\,\Delta_x \geqslant \Delta_x, \qquad \Delta_{\mathrm{ctg}\, x} = (1 + \mathrm{ctg}^2 x)\,\Delta_x \geqslant \Delta_x. \tag{4.11}$$

Пример 4.1. Диаметр круга, измеренный с точностью до 1 *мм*, оказался равным $d = 0{,}842$ *м*. Вычислить площадь круга.

Решение. Площадь круга $S = \pi d^2/4$. Так как число π мы можем взять для расчета с любой точностью, то погрешность вычисления площади определяется погрешностью вычисления d^2. Относительная погрешность d^2 равна

$$\delta_{d^2} = 2\delta_d = 2 \cdot \frac{1}{842} = 0{,}24\%.$$

Чтобы при округлении числа π не увеличить относительную погрешность

$$\delta_S = \delta\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\delta_d,$$

надо взять число π по крайней мере с четырьмя верными знаками, еще лучше с пятью. Тогда получим

$$S = \frac{3{,}1416}{4} \cdot 0{,}842^2 \ \text{м}^2 = 0{,}7854 \cdot 0{,}7090 \ \text{м}^2 = 0{,}5568 \ \text{м}^2.$$

Абсолютная погрешность результата составляет

$$\Delta_S = S\delta_S = 0{,}557 \cdot 0{,}0024 = 0{,}0014.$$

Округляем результат до трех знаков (отбрасывая запасной знак и пользуясь правилом дополнения):

$$S = 0{,}557 \ \text{м}^2, \qquad \Delta_S = 0{,}002.$$

Пример 4.2. Угол $x = 25°20'$ измерен с точностью до $1'$. Определить $\sin x$ и его абсолютную погрешность.

Решение. Вычислим сначала абсолютную погрешность $\sin x$ по формуле (4.10); для этого надо еще перевести $1'$ в радианы: $1' = 0{,}000291$ — и подсчитать

$$\Delta_{\sin x} = \cos x \cdot \Delta_x = \cos 25°20' \cdot 0{,}000291 = 0{,}00026.$$

Поэтому для вычисления $\sin x$ надо взять четырехзначные таблицы тригонометрических функций, что дает

$$\sin x = \sin 25°20' = 0{,}4279.$$

2. Функции нескольких переменных. Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, вызываемая достаточно малыми погрешностями Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, ..., Δ_{x_n} аргументов x_1, x_2, ..., x_n, оценивается величиной

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}. \tag{4.12}$$

Если значения функции положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}. \tag{4.13}$$

Пример 4.3. Вычислить значение функции $u = xy^2z^3$, если

причем
$$\begin{aligned} x &= 37{,}1, & y &= 9{,}87, & z &= 6{,}052, \\ \Delta_x &= 0{,}3, & \Delta_y &= 0{,}11, & \Delta_z &= 0{,}016. \end{aligned}$$

Решение. Здесь относительные погрешности аргументов равны

$$\delta_x = \frac{3}{371} = 0{,}81\%, \qquad \delta_y = \frac{11}{987} = 1{,}12\%, \qquad \delta_z = \frac{16}{6052} = 0{,}26\%.$$

Относительная погрешность функции равна

$$\delta_u = \delta_x + 2\delta_y + 3\delta_z = 3{,}8\%;$$

поэтому значение функции следует вычислять не более чем с двумя-тремя знаками:

$$u = 801 \cdot 10^3$$

(нельзя писать 801 000, это имело бы другой смысл!).

Абсолютная погрешность при этом составляет

$$\Delta_u = u\delta_u = 801 \cdot 10^3 \cdot 0{,}038 = 30 \cdot 10^3.$$

Здесь целесообразно округлить результат до двух знаков:

$$u = 8{,}0 \cdot 10^5, \qquad \Delta_u = 0{,}3 \cdot 10^5.$$

Пример 4.4. Вычислить значение $z = \ln(10{,}3 + \sqrt{4{,}4})$, считая верными все знаки приближенных чисел $x = 10{,}3$ и $y = 4{,}4$.

Решение. Число y имеет относительную погрешность $\delta_y = \frac{0{,}5}{44} = 1{,}2\%$, поэтому $\sqrt{y}$ имеет относительную погрешность 0,6% и его следует записать с тремя знаками:

$$\sqrt{y} = \sqrt{4{,}4} = 2{,}10;$$

при этом абсолютная погрешность этого корня равна

$$\Delta_{\sqrt{y}} = 2{,}10 \cdot 0{,}006 = 0{,}013.$$

Абсолютная погрешность суммы

$$x + \sqrt{y} = 10{,}3 + 2{,}10 = 12{,}4$$

оценивается величиной $0{,}05 + 0{,}013 = 0{,}063$, ее относительная погрешность равна $\frac{0{,}63}{124} = 0{,}5\%$.

По формуле (4.8) такова же будет абсолютная погрешность натурального логарифма, т. е. $\Delta_z = 0{,}005$. Поэтому

$$z = \ln(10{,}3 + 2{,}10) = \ln 12{,}40 = 2{,}517.$$

Здесь результат имеет три верных знака; округление до верных знаков нецелесообразно, так как при этом надо писать значение Δ_z с учетом погрешности округления:

$$z = 2{,}52, \qquad \Delta_z = 0{,}008.$$

ЗАДАЧИ

1. Углы x измерены с предельной абсолютной погрешностью Δ_x. Определить абсолютную и относительную погрешности функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $y = \operatorname{tg} x$. Найти по таблицам значения функций, сохранив в результате лишь верные цифры.

а) $x = 11°20'$, $\Delta_x = 1'$, б) $x = 48°42'31''$, $\Delta_x = 5''$, в) $x = 45°$, $\Delta_x = 1'$, г) $x = 50°10'$, $\Delta_x = 0{,}05°$, д) $x = 0{,}45$, $\Delta_x = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$, е) $x = 1{,}115$, $\Delta_x = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$.

2. Для следующих функций вычислить значения при указанных значениях x и указать абсолютную и относительную погрешности результатов.

а) $y = x^3 \sin x$ при $x = \sqrt{2}$, полагая $\sqrt{2} \approx 1{,}414$,

б) $y = x \ln x$ при $x = \pi$, полагая $\pi \approx 3{,}142$,

в) $y = e^x \cos x$ при $x = \sqrt{3}$, полагая $\sqrt{3} \approx 1{,}732$.

3. Для следующих функций вычислить значения при указанных значениях переменных. Указать абсолютную и относительную погрешности результатов, считая все знаки исходных данных верными.

а) $u = \ln(x_1 + x_2^2)$, $x_1 = 0{,}97$, $x_2 = 1{,}132$,

б) $u = \frac{x_1 + x_2^2}{x_3}$, $x_1 = 3{,}28$, $x_2 = 0{,}932$, $x_3 = 1{,}132$,

в) $u = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $x_1 = 2{,}104$, $x_2 = 1{,}935$, $x_3 = 0{,}845$.

4. Определить относительную погрешность при вычислении полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований R и r и образующая l, измеренные с точностью до 0,01 *см*, равны

$$R = 23{,}64 \text{ см}, \qquad r = 17{,}31 \text{ см}, \qquad l = 10{,}21 \text{ см}.$$

§ 5. Определение допустимой погрешности аргументов по допустимой погрешности функции

Эта задача имеет однозначное решение только для функции одной переменной $y=f(x)$: если эта функция дифференцируема и $f'(x) \neq 0$, то

$$\Delta_x = \frac{1}{|f'(x)|} \Delta_y. \tag{5.1}$$

Для функции нескольких переменных $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задача решается только при введении каких-либо дополнительных ограничений. Например, если значение одного из аргументов значительно труднее измерить или вычислить с большой точностью, чем значения остальных аргументов, то погрешность именно этого аргумента надо согласовать с требуемой погрешностью функции.

Если значения всех аргументов можно одинаково легко определить с любой точностью, то обычно применяют *принцип равных влияний*, считая, что в формуле (4.12) все слагаемые $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta_{x_i}$ равны между собой; это дает формулу

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_y}{n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{5.2}$$

На практике часто встречаются задачи промежуточного типа между указанными крайними случаями. Мы рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 5.1. С какой точностью следует измерить угол x в первой четверти, чтобы получить значение $\sin x$ с пятью верными знаками?

Решение. Если известно, что угол $x > 6°$, так что $\sin x > 0{,}1$, то надо определить Δ_x так, чтобы выполнялось неравенство $\Delta_{\sin x} < 0{,}5 \cdot 10^{-5}$. Для этого в соответствии с формулой (4.10) достаточно взять $\Delta_x < 0{,}5 \cdot 10^{-5}$, т. е. измерить угол x с точностью до $1''$. Если, сверх того, известно, что угол $x > 60°$ и, значит, $\cos x < 0{,}5$, то сто́ит воспользоваться формулой (5.1), откуда

$$\Delta_x = \frac{1}{\cos x} \Delta_{\sin x} > 2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-5} = 10^{-5},$$

т. е. достаточно измерить угол x с точностью всего до $2''$.

Но если угол $x < 6°$, например, $1° < x < 6°$, то $0{,}01 < \sin x < 0{,}1$ и для обеспечения пяти верных знаков в значении $\sin x$ придется обеспечить неравенство $\Delta_{\sin x} < 0{,}5 \cdot 10^{-6}$, для чего придется измерять угол x с точностью до $0{,}1''$.

Пример 5.2. С какой точностью следует определить радиус основания R и высоту H цилиндрической банки, чтобы ее вместимость можно было определить с точностью до 1%?

Решение. В формуле $V=\pi R^2 H$ число π можно взять с любым числом верных знаков, так что его погрешность не скажется на результате, и поэтому можно считать $\delta_V=2\delta_R+\delta_H$. Если можно обеспечить любую точность определения R и H, то можно воспользоваться принципом равных влияний, откуда на долю $2\delta_R$ и δ_H приходится по 0,5%. Таким образом, по принципу равных влияний надо определить радиус с относительной погрешностью 0,25%, а высоту — с относительной погрешностью 0,5%. На практике чаще встречаются такие случаи, когда, наоборот, радиус банки определяется с меньшей точностью, чем высота. Например, если радиус определяется с точностью вдвое меньшей, чем высота, то полагаем $\delta_R=2\delta_H$ и из условия

$$2\delta_R+\delta_H=5\delta_H=1\%$$

находим

$$\delta_H=0{,}2\%, \qquad \delta_R=0{,}4\%.$$

Что касается числа π, то во всех указанных случаях надо брать его с относительной погрешностью порядка 0,01%, чтобы эту погрешность можно было не учитывать в окончательном результате. Это означает, что можно положить $\pi=3{,}142$ с относительной погрешностью $\frac{0{,}4}{3142}=0{,}013\%$, но не следует полагать $\pi=3{,}14$ с относительной погрешностью $\frac{0{,}16}{314}=0{,}051\%$.

Пример 5.3. Найти допустимую абсолютную погрешность приближенных величин $x=15{,}2$, $y=57°$, для которых возможно найти значение функции

$$u=6x^2(\lg x-\sin 2y)$$

с точностью до двух десятичных знаков (после запятой).

Решение. Находим

$$u=6x^2(\lg x-\sin 2y)=6\,(15{,}2)^2(\lg 15{,}2-\sin 114°)=371{,}9,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=12x(\lg x-\sin 2y)+6x\cdot\lg e=88{,}54,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-12x^2\cos 2y=1127{,}7.$$

По условию $\Delta_u=0{,}005$. Тогда согласно принципу равных влияний по формуле (5.2) находим

$$\Delta_x=\frac{\Delta_u}{2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|}=\frac{0{,}005}{2\cdot 88{,}54}=0{,}28\cdot 10^{-4},$$

$$\Delta_y=\frac{\Delta_u}{2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|}=\frac{0{,}005}{2\cdot 1127{,}7}=0{,}22\cdot 10^{-5}=0'',45.$$

ЗАДАЧИ

1. С какой точностью следует взять приближенные числа x, чтобы значения $\sin x$ могли быть найдены с указанным числом m верных знаков?

а) $x=1^\circ$, $m=3$, б) $x=25^\circ$, $m=4$, в) $x=30{,}75^\circ$, $m=3$, г) $x=1{,}05$, $m=2$, д) $x=0{,}075$, $m=2$.

2. С какой точностью определены углы x по значениям $\sin x$, взятым из пятизначной таблицы функций?

а) $x=2^\circ 1'$, б) $x=15^\circ 30'$, в) $x=44^\circ$, г) $x=50^\circ 18'$, д) $x=65^\circ 23'$, е) $x=87^\circ$.

3. С какой точностью может быть определено число x по логарифму с помощью пятизначной таблицы логарифмов, если число находится в указанных пределах?

а) $300<x<400$, б) $35<x<40$, в) $1{,}5<x<1{,}7$, г) $3{,}25<x<3{,}29$, д) $5000<x<6000$.

4. С каким числом верных знаков следует взять значение аргумента x, чтобы получить значения указанных функций с точностью до $0{,}1\cdot 10^{-5}$?

а) $y=x^3\sin x$, $x=\sqrt{2}$, б) $y=x\ln x$, $x=\pi$, в) $y=e^x\cos x$, $x=\sqrt{3}$.

5. С каким числом верных знаков должен быть известен свободный член уравнения

$$x^2-2x+\lg 2=0,$$

чтобы получить корни с четырьмя верными знаками?

6. Найти допустимые абсолютные погрешности аргументов, которые позволяют вычислять значения данных функций с четырьмя верными знаками.

а) $u=\ln(x_1+x_2^2)$, $x_1=0{,}9731$, $x_2=1{,}13214$, б) $u=\dfrac{x_1+x_2^2}{x_3}$, $x_1=3{,}2835$, $x_2=0{,}93221$, $x_3=1{,}13214$, в) $u=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $x_1=2{,}10415$, $x_2=1{,}93521$, $x_3=0{,}84542$.

7. Для определения модуля Юнга по прогибу стержня прямоугольного сечения применяется формула

$$E=\frac{1}{4}\,\frac{l^3P}{d^3bs},$$

где l — длина стержня, b и d — основание и высота поперечного сечения, s — стрела прогиба, P — нагрузка. С какой точностью следует измерить длину l и стрелу s, чтобы погрешность E не превышала 5,5% при условии, что P известна с точностью до 0,1%, величины b и d известны с точностью до 1%, $l\approx 50$ *см*, $s\approx 2{,}5$ *см*?

ГЛАВА II

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

При вычислении с помощью счетных машин значений функций, заданных формулами, далеко не безразлично, в каком виде записана соответствующая формула. Математически эквивалентные выражения часто оказываются неравноценными с точки зрения практики вычислений. Дело в том, что основными операциями большинства вычислительных машин являются сложение, вычитание, умножение и деление. Поэтому возникает необходимость представить рассматриваемую математическую задачу в виде последовательности этих элементарных операций. Учитывая ограниченность объема памяти машины и необходимость экономии машинного времени, желательно эти операции разбить на повторяющиеся циклы и выбрать соответствующий алгоритм. Ниже мы рассмотрим приемы, сводящие вычисление некоторых функций к таким циклам из элементарных операций.

§ 1. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера

Пусть дан многочлен n-й степени

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с действительными коэффициентами a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$, и пусть требуется найти значение этого многочлена при $x = \xi$

$$P(\xi) = a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \ldots + a_n. \tag{1.1}$$

Вычисление значения $P(\xi)$ удобнее всего производить следующим образом. Представим выражение (1.1) в виде

$$P(\xi) = (\ldots(((a_0\xi + a_1)\xi + a_2)\xi + a_3)\xi + \ldots + a_n).$$

Если ввести числа

$$\left.\begin{array}{ll} & b_0 = a_0, \\ c_1 = b_0\xi, & b_1 = a_1 + c_1, \\ c_2 = b_1\xi, & b_2 = a_2 + c_2, \\ \ldots & \ldots \\ c_n = b_{n-1}\xi, & b_n = a_n + c_n, \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

то $b_n = P(\xi)$.

Таким образом, вычисление значения многочлена $P(x)$ при $x=\xi$ сводится к повторению следующей совокупности элементарных операций:

$$c_k = b_{k-1}\xi, \qquad b_k = a_k + c_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Нетрудно показать, что числа $b_0 = a_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_{n-1}$ являются коэффициентами многочлена $Q(x)$, полученного в качестве частного при делении данного многочлена $P(x)$ на двучлен $x-\xi$, а $b_n = P(\xi)$ — остаток от деления.

Таким образом, формулы (1.2) позволяют, не производя деления, определять коэффициенты частного $Q(x)$, а также остаток $P(\xi)$. Числа $b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_n$ обычно находят, пользуясь известной *схемой Горнера*

$$\begin{array}{rcccccl} & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & \underline{|\xi} \\ + & & b_0\xi & b_1\xi & \ldots & b_{n-1}\xi & \\ \hline & b_0=a_0 & b_1 & b_2 & \ldots & \underline{b_n=P(\xi)} & \end{array}$$

Вычисление значений многочлена $P_n(x)$ по схеме Горнера требует выполнения n умножений и $n-k$ сложений, где k — число коэффициентов a_i, равных нулю. Если $a_0=1$, то требуется выполнить $n-1$ умножений. Показано, что для многочленов общего вида нельзя построить схему более экономную в смысле числа операций, чем схема Горнера.

Пример 1.1. Вычислить при $x=-1{,}5$ значение многочлена

$$P(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 1.$$

Решение. Пользуясь схемой Горнера, получим

$$\begin{array}{rcccccccl} & 1 & -2 & 1 & -3 & 4 & -1 & 6 & -1 & \underline{|-1{,}5} \\ + & & -1{,}5 & 5{,}25 & -9{,}375 & 18{,}5625 & -33{,}8438 & 52{,}2657 & -87{,}3985 & \\ \hline & 1 & -3{,}5 & 6{,}25 & -12{,}375 & 22{,}5625 & -34{,}8438 & 58{,}2657 & -88{,}3985 = & \\ & & & & & & & & =P(-1{,}5). & \end{array}$$

Таким образом,

$$P(-1{,}5) = -88{,}3985.$$

ЗАДАЧИ

1. Дан многочлен

$$P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4.$$

Найти значение $P(3{,}25)$ для коэффициентов $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$, приведенных в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Коэффициенты a_i ($i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
а)	7,54	11,08	3,82	0,44	−0,48	д)	2,79	9,85	14,15	5,38	7,24
б)	9,36	12,69	14,39	0,79	−0,94	е)	3,45	−2,91	3,79	−6,75	−2,38
в)	12,78	14,35	17,19	1,34	−1,72	ж)	4,79	5,38	−2,86	7,31	4,55
г)	15,65	17,58	21,7	2,78	1,34	з)	8,34	−7,75	4,53	−9,29	5,79

2. Дан многочлен

$$P(x)=0{,}22x^5-3{,}27x^4-2{,}74x^3+2{,}81x^2-3{,}36x+2.$$

Найти значения $P(\xi)$, где $\xi=0{,}80+0{,}05k$; $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 20$.

§ 2. Вычисление значений некоторых трансцендентных функций с помощью степенных рядов

Здесь рассматриваются только такие трансцендентные функции, которые являются суммами своих рядов Маклорена

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \tag{2.1}$$

Беря сумму нескольких первых членов ряда Маклорена, получаем приближенную формулу

$$f(x)\approx P_n(x),$$

где

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

При этом остаток ряда

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

представляет ошибку при замене $f(x)$ многочленом $P_n(x)$. Оценка остатка позволяет определить требуемое число слагаемых, т. е. степень n многочлена $P_n(x)$.

Заметим, что так как расчет суммарной погрешности представляет собой трудоемкую операцию, то на практике для обеспечения заданной точности все промежуточные вычисления производят с одним или двумя запасными знаками.

1. Вычисление значений показательной функции. Для показательной функции справедливо разложение

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\qquad(-\infty<x<\infty). \tag{2.2}$$

Вычисления удобно вести, пользуясь следующей рекуррентной записью:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} u_k, \qquad u_k = \frac{x}{k} u_{k-1}, \qquad S_k = S_{k-1} + u_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $u_0 = 1$, $S_0 = 1$. Число $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ приближенно дает искомый результат e^x.

Для остатка ряда может быть получена следующая оценка (см. [12]):

$$|R_n(x)| < |u_n| \text{ при } \quad 0 < 2|x| \leqslant n;$$

поэтому процесс суммирования может быть прекращен, как только очередной вычисленный член ряда u_k будет по модулю меньше заданной допустимой погрешности ε:

$$|u_n| < \varepsilon \qquad \left(\text{если только } |x| \leqslant \frac{n}{2}\right).$$

При больших по модулю значениях x ряд (2.2) малопригоден для вычислений. В этих случаях обычно поступают так: представляют x в виде суммы

$$x = E(x) + q,$$

где $E(x)$ — целая часть x и q — дробная его часть, $0 \leqslant q < 1$. Тогда

$$e^x = e^{E(x)} \cdot e^q.$$

Первый множитель $e^{E(x)}$ находится с помощью умножения

$$e^{E(x)} = \underbrace{e \cdot e \ldots e}_{E(x) \text{ раз}}, \quad \text{если} \quad E(x) > 0,$$

и

$$e^{E(x)} = \underbrace{\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e} \ldots \frac{1}{e}}_{-E(x) \text{ раз}}, \quad \text{если } E(x) < 0.$$

Второй множитель вычисляется с помощью степенного разложения

$$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}.$$

При $0 \leqslant q < 1$ этот ряд быстро сходится, так как

$$0 \leqslant R_n(q) < \frac{1}{n!\,n} q^{n+1}.$$

Пример 2.1. Найти $\sqrt{e}$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. Пользуемся формулой

$$e^{1/2}=\sum_{k=0}^{n} u_k + R_n\left(\frac{1}{2}\right), \tag{2.3}$$

где $u_0=1$, $u_k=\frac{u_{k-1}}{2k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Слагаемые подсчитываем с двумя запасными десятичными знаками.

Последовательно имеем

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1,\\
u_1 &= \frac{u_0}{2} = 0{,}5000000,\\
u_2 &= \frac{u_1}{4} = 0{,}1250000,\\
u_3 &= \frac{u_2}{6} = 0{,}0208333,\\
u_4 &= \frac{u_3}{8} = 0{,}0026042,\\
u_5 &= \frac{u_4}{10} = 0{,}0002604,\\
u_6 &= \frac{u_5}{12} = 0{,}0000217,\\
u_7 &= \frac{u_6}{14} = \underline{0{,}0000016,}\\
S_7 &= 1{,}6487212.
\end{aligned}$$

Округляя сумму до пяти десятичных знаков после запятой, получим

$$\sqrt{e}=1{,}64872.$$

Для вычисления значений показательной функции a^x $(a>0)$ можно использовать формулу $a^x=e^{x\ln a}$.

2. Вычисление значений синуса и косинуса. Для вычисления значений функций $\sin x$ и $\cos x$ пользуемся степенными разложениями

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{2.4}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (-\infty<x<\infty). \tag{2.5}$$

Ряды (2.4) и (2.5) при больших x сходятся медленно, но, учитывая периодичность функций $\sin x$ и $\cos x$ и формулы приведения тригонометрических функций, легко заключить, что достаточно уметь вычислять $\sin x$ и $\cos x$ для промежутка $0\leqslant x\leqslant \pi/4$. При этом можно использовать следующие рекуррентные формулы:

$$\left.\begin{aligned} &\sin x = \sum_{k=1}^{n} u_k + R_n(x), \\ &u_1 = x,\ u_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k \ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1); \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos x = \sum_{k=1}^{n} v_n + R_n(x), \\ &v_1 = 1,\ v_{k+1} = -\frac{x^2}{(2k-1)\,2k} v_k \ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

Так как в промежутке $(0,\ \pi/4)$ ряд (2.4) знакочередующийся с монотонно убывающими по модулю членами, то для его остатка R_n справедлива оценка

$$|R_n| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = |u_{n+1}|.$$

Аналогично для ряда (2.5) $|R_n| \leqslant |v_{n+1}|$. Следовательно, процесс вычисления $\sin x$ и $\cos x$ можно прекратить, как только очередной полученный член ряда по модулю будет меньше допустимой погрешности ε.

Пример 2.2. Вычислить $\sin 23°54'$ с точностью до 10^{-4}.

Решение. Переводим аргумент в радианы, сохраняя один запасной знак: $x = \operatorname{arc} 23°54' = 0{,}41714$. Применяя формулу (2.6), получим

$$\begin{aligned} u_1 &= x = +0{,}41714, \\ u_2 &= -\frac{x^2 u_1}{2\cdot 3} = -0{,}01210, \\ u_3 &= -\frac{x^2 u_2}{4\cdot 5} = +0{,}00011, \\ u_4 &= -\frac{x^2 u_3}{6\cdot 7} = -0{,}00000. \end{aligned}$$

Отсюда $\sin 23°54' = 0{,}40515 \approx 0{,}4052$.

Пример 2.3. Вычислить $\cos 17°24'$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. $x = \operatorname{arc} 17°24' = 0{,}30369$. Применяя формулу (2.7), будем иметь

$$\begin{aligned} v_1 &= 1{,}000000, \\ v_2 &= -\frac{x^2}{1\cdot 2} v_1 = -0{,}046114, \\ v_3 &= -\frac{x^2}{3\cdot 4} v_2 = +0{,}000354, \\ v_4 &= -\frac{x^2}{5\cdot 6} v_3 = -0{,}000001. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\cos 17°24' = 0{,}95424.$$

3. Вычисление значений гиперболического синуса и гиперболического косинуса. Пользуемся степенными разложениями

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{2.8}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{2.9}$$

и рекуррентной записью

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \sum_{k=1}^{n} u_k + R_n, \\ u_1 = x, \ u_{k+1} &= \frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k; \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \sum_{k=0}^{n} v_k + R_n^*, \\ v_0 = 1, \ v_{k+1} &= \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} v_k. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

При $n \geqslant |x| > 0$ имеют место оценки (см. [12]) $R_n < \frac{1}{3}|u_n|$ и $R_n^* < \frac{2}{3} v_n$.

Пример 2.4. Вычислить $\operatorname{sh} 1,4$ с точностью до 10^{-6}.

Решение. Применяя формулу (2.10), получим

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,4000000, \\ u_2 &= \frac{x^2}{2\cdot 3} u_1 = 0,4573333, \\ u_3 &= \frac{x^2}{4\cdot 5} u_2 = 0,0448187, \\ u_4 &= \frac{x^2}{6\cdot 7} u_3 = 0,0020915, \\ u_5 &= \frac{x^2}{8\cdot 9} u_4 = 0,0000569, \\ u_6 &= \frac{x^2}{10\cdot 11} u_5 = 0,0000010. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{sh} 1,4 = 1,904301.$$

4. Вычисление значений логарифмической функции. Пользуемся разложением по степеням $\frac{1-z}{1+z}$:

$$\ln z = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2k-1} \qquad (0 < z < +\infty).$$

Пусть x — положительное число. Представим его в виде

$$x = 2^m z,$$

где m—целое число и $1/2 \leqslant z < 1$; тогда, полагая

$$\frac{1-z}{1+z}=\xi,$$

получим

$$\ln x = \ln 2^m z = m \ln 2 + \ln z = m \ln 2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \xi^{2k-1},$$

где $0 < \xi \leqslant 1/3$. Обозначив

$$u_k = \frac{\xi^{2k-1}}{2k-1} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

получаем рекуррентную запись

$$\left.\begin{aligned} \ln x &= m \ln 2 - 2 \sum_{k=1}^{n} u_k + R_n, \\ u_1 = \xi, \quad u_{k+1} &= \frac{(2k-1)\,\xi^2}{2k+1} u_k. \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Процесс суммирования прекращается, как только выполнится неравенство $u_n < 4\varepsilon$, где ε—допустимая погрешность (см. [12]).

Пример 2.5. Найти $\ln 5$ с точностью до 10^{-6}.

Решение. Вычисления будем производить с двумя запасными знаками. Положим $5 = 2^3 \cdot 0{,}625$. Следовательно, $z = 0{,}625$ и $\xi = \frac{1-z}{1+z} = \frac{0{,}375}{1{,}625} = 0{,}23076923$.

Выпишем первые слагаемые:

$$\begin{aligned} u_1 &= \xi \quad = 0{,}23076923, \\ u_2 &= \frac{\xi^3}{3} = 0{,}00409650, \\ u_3 &= \frac{\xi^5}{5} = 0{,}00013089, \\ u_4 &= \frac{\xi^7}{7} = 0{,}00000498, \\ \hline \text{сумма} &= 0{,}23500160. \end{aligned}$$

По формуле (2.12) получим

$$\ln 5 = 3 \cdot 0{,}69314718 - 2 \cdot 0{,}23500160 = 1{,}609438.$$

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь разложением в степенной ряд, составить с указанной точностью ε таблицы значений следующих функций.

а) e^x, $x = 0{,}300 + 0{,}002k$ $(k = 0, 1, \ldots, 14)$, $\varepsilon = 10^{-5}$,

б) e^x, $x = 2{,}500 + 0{,}002k$ $(k = 0, 1, \ldots, 14)$, $\varepsilon = 10^{-4}$, в) e^{-x}, $x=1{,}35+0{,}01k$ $(k=0, 1, \ldots, 14)$, $\varepsilon=10^{-5}$,

г) e^{-x}, $x=0{,}505+0{,}005k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$, $\varepsilon=10^{-5}$,

д) e^{x^2}, $x=0{,}50+0{,}02k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$, $\varepsilon=10^{-5}$,

е) e^{-x^2}, $x=1{,}30+0{,}01k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$, $\varepsilon=10^{-5}$,

ж) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2/2}$, $x=1{,}78+0{,}03k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$, $x=2{,}545+0{,}005k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$.

2. Пользуясь разложением $\sin x$ и $\cos x$ в степенной ряд, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-5}.

а) $\sin x$, $x=0{,}345+0{,}005k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$,

б) $\sin x$, $x=1{,}75+0{,}01k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$,

в) $\cos x$, $x=0{,}745+0{,}005k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$,

г) $\cos x$, $x=1{,}75+0{,}01k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$,

д) $\frac{\sin x}{x}$, $x=0{,}4+0{,}01k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$,

е) $\frac{\cos x}{x}$, $x=0{,}25+0{,}01k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$.

3. Пользуясь разложением $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ в степенной ряд, составить таблицы значений следующих функций с точностью до ε.

а) $\operatorname{sh} x$, $x=0{,}23+0{,}01k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$, $\varepsilon=10^{-5}$, $x=2{,}30+0{,}05k$ $(k=0, 1, \ldots, 15)$, $\varepsilon=10^{-4}$, б) $\operatorname{ch} x$ для тех же значений x.

§ 3. Некоторые многочленные приближения

Вычисление с помощью рядов Тейлора дает достаточно быструю сходимость, вообще говоря, только при малых значениях $|x-x_0|$. Однако часто бывает нужно с помощью многочлена сравнительно невысокой степени подобрать приближение, которое давало бы достаточную точность для всех точек заданного отрезка. В этих случаях применяются разложения функций, полученные с помощью полиномов Чебышева на заданном отрезке. Ниже приводятся примеры таких разложений, указываются промежутки, в которых их следует использовать, а также соответствующие абсолютные погрешности ε (см. [25]). Для вычисления значений многочлена можно использовать схему Горнера.

1. Вычисление значений показательной функции на отрезке $[-1, 1]$. Пользуемся следующим многочленным приближением:

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{7} a_k x^k \qquad (|x| \leqslant 1), \quad \varepsilon = 2\cdot 10^{-7}, \tag{3.1}$$

$a_0=0{,}9999998$, $a_1=1{,}0000000$, $a_2=0{,}5000063$, $a_3=0{,}1666674$, $a_4=0{,}0416350$, $a_5=0{,}0083298$, $a_6=0{,}0014393$, $a_7=0{,}0002040$.

2. Вычисление значений логарифмической функции. Имеет место формула

$$\ln(1+x) \approx \sum_{k=1}^{7} a_k x^k \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad \varepsilon = 2{,}2\cdot 10^{-7}, \tag{3.2}$$

$a_1 = 0{,}999981028, \quad a_2 = -0{,}499470150, \quad a_3 = 0{,}328233122,$
$a_4 = -0{,}225873284, \quad a_5 = 0{,}134639267, \quad a_6 = -0{,}055119959,$
$a_7 = 0{,}010757369.$

3. Вычисление значений тригонометрических функций. Пользуемся следующими многочленными приближениями:

$$\sin x \approx \sum_{k=0}^{4} a_{2k+1} x^{2k+1} \qquad (|x| \leqslant \pi/2), \quad \varepsilon = 6 \cdot 10^{-9}, \tag{3.3}$$

$a_1 = 1{,}000000002, \quad a_3 = -0{,}166666589, \quad a_5 = 0{,}008333075,$
$a_7 = -0{,}000198107, \quad a_9 = 0{,}000002608;$

$$\cos x \approx \sum_{k=0}^{5} a_{2k} x^{2k} \qquad (|x| \leqslant 1), \quad \varepsilon = 2 \cdot 10^{-9}, \tag{3.4}$$

$a_0 = 1{,}000000000000, \quad a_2 = -0{,}499999999942,$
$a_4 = 0{,}041666665950, \quad a_6 = -0{,}001388885683,$
$a_8 = 0{,}000024795132, \quad a_{10} = -0{,}000000269591;$

$$\operatorname{tg} x \approx \sum_{k=0}^{6} a_{2k+1} x^{2k+1} \qquad (|x| \leqslant \pi/4), \quad \varepsilon = 2 \cdot 10^{-8}, \tag{3.5}$$

$a_1 = 1{,}00000002, \quad a_3 = 0{,}33333082, \quad a_5 = 0{,}13339762,$
$a_7 = 0{,}05935836, \quad a_9 = 0{,}02457096, \quad a_{11} = 0{,}00294045,$
$a_{13} = 0{,}00947324.$

Пример 3.1. Пользуясь многочленным приближением, найти значение $\sqrt{e}$ с точностью до 10^{-6}.

Решение. Вычисления проводим по формуле (3.1), пользуясь схемой Горнера (см. § 1) при $x = 0{,}5$ (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1

Схема Горнера для многочлена (3.1)

+ 0,0002040	0,0014393 0,0001020	0,0083298 0,0007706	0,0416350 0,0045502
0,0002040	0,0015413	0,0091004	0,0461852

0,1666674 0,0230926	0,5000063 0,0948800	1,0000000 0,2974431	0,9999998 |0,5 0,6487216
0,1897600	0,5948863	1,2974431	1,6487214 = P (0,5)

Округляя до шести знаков после запятой, получим $e^{1/2} \approx$ $\approx 1{,}648721$ (ср. пример 2.1).

Пример 3.2. Пользуясь многочленным приближением, найти значение $\sin 0{,}5$ с точностью до 10^{-8}.

Решение. Вычисления можно провести по формуле (3.3), пользуясь схемой Горнера при $x = 0{,}5$. Но так как многочлен в формуле (3.3) содержит только нечетные степени x, удобнее переписать его в виде

$$\sum_{k=0}^{4} a_{2k+1}x^{2k+1} = (a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + a_7x^6 + a_9x^8)\,x$$

и применить схему Горнера к многочлену

$$P(\xi) = a_1 + a_3\xi + a_5\xi^2 + a_7\xi^3 + a_9\xi^4, \qquad \xi = x^2 = 0{,}25. \qquad (3.6)$$

Вычисление значения $P(0{,}25)$ проведено в табл. 3.2. Умножая полученное значение $P(0{,}25) = 0{,}958851087$ на $x = 0{,}5$ и округляя, получим искомое значение $\sin 0{,}5 \approx 0{,}47942554$.

Таблица 3.2

Схема Горнера для многочлена (3.6)

+0,000002608	−0,000198107	0,008333075	−0,166666589	1,000000002	0,25
	0,000000652	−0,000049364	0,002070928	−0,041148915	
0,000002608	−0,000197445	0,008283711	−0,164595661	0,958851087 = $P(0{,}25)$	

ЗАДАЧИ

1. Составить таблицы значений следующих функций с точностью до ε для указанных значений x.

а) e^x, $x = 0{,}725 + 0{,}001k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $x = 0{,}213 + 0{,}002k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$, $\varepsilon = 10^{-5}$,

б) e^{-x}, $x = 0{,}213 + 0{,}003k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $x = 1{,}27 + 0{,}02k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$, $\varepsilon = 10^{-5}$,

в) $e^{1/x}$, $x = 2 + 0{,}5k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$, $\varepsilon = 10^{-5}$,

г) $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$, $x = 0{,}4 + 0{,}02k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $x = 1{,}2 + 0{,}1k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

2. Составить таблицы для следующих функций с точностью до 10^{-5} для указанных значений x.

а) $\sin x$, $x = 0{,}055 + 0{,}003k$ $(k = 0, 1, \ldots, 15)$, $x = 0{,}80 + 0{,}05k$ $(k = 0, 1, \ldots, 15)$, б) $\cos x$ для тех же значений x, в) $\operatorname{tg} x$ для тех же значений x.

§ 4. Применение цепных дробей для вычисления значений трансцендентных функций

1. Вводные замечания. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — две последовательности. Выражение вида

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ddots}}}=\left[a_0;\ \frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\ \ldots\right] \tag{4.1}$$

называется *цепной* или *непрерывной* дробью, отвечающей заданным последовательностям $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$. В общем случае элементы цепной дроби a_0, a_k, b_k $(k=1, 2, \ldots)$ — вещественные или комплексные числа или функции одной или нескольких переменных. Выражения

$$a_0+\frac{b_1}{a_1},\quad a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2}},\quad a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3}}},\quad \ldots,\quad a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\ddots+\cfrac{}{a_{n-1}+\cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

называются соответственно первой, второй, третьей, ..., n-й *подходящей* дробью для данной бесконечной дроби и обычно обозначаются $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}$. При работе на ЭВМ подходящие цепные дроби удобно находить с помощью следующей последовательности операций:

$$\begin{aligned}
&c_1=\frac{b_n}{a_n}, && d_1=a_{n-1}+c_1,\\
&c_2=\frac{b_{n-1}}{d_1}, && d_2=a_{n-2}+c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_k=\frac{b_{n-k+1}}{d_{k-1}}, && d_k=a_{n-k}+c_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_n=\frac{b_1}{d_{n-1}}, && d_n=a_0+c_n=\frac{P_n}{Q_n}.
\end{aligned}$$

Указанная последовательность действий легко программируется.

Для числителей и знаменателей подходящих дробей имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$P_n=a_nP_{n-1}+b_nP_{n-2},\qquad Q_n=a_nQ_{n-1}+b_nQ_{n-2}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $P_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$, $P_0=a_0$, $Q_0=1$.

Цепная дробь (4.1) называется *сходящейся*, если существует конечный предел A подходящей дроби P_n/Q_n при $n\to\infty$:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n},$$

причем число A принимается за значение этой дроби. Если же предел не существует, то цепная дробь (4.1) называется *расходящейся*. Для сходящейся цепной дроби подходящая дробь P_n/Q_n является ее приближенным значением.

2. Разложение e^x в цепную дробь. Пользуемся следующим разложением:

$$e^x = \left[0, \frac{1}{1}, \frac{-2x}{2+x}, \frac{x^2}{6}, \frac{x^2}{10}, \ldots, \frac{x^2}{4n+2}, \ldots\right]. \tag{4.2}$$

Для любого x эта дробь сходящаяся. Подходящими дробями для данной функции являются

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{1}{1}, \qquad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{2+x}{2-x}, \qquad \frac{P_3}{Q_3}=\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2},$$

$$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3},$$

$$\frac{P_5}{Q_5}=\frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}.$$

Пример 4.1. Пользуясь разложением e^x в цепную дробь, вычислить $1/e$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. Вычислим четвертую и пятую подходящие дроби при $x=-1$:

$$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{120-60+12-1}{120+60+12+1}=\frac{71}{193}\approx 0{,}367876,$$

$$\frac{P_5}{Q_5}=\frac{1680-840+180-20+1}{1680+840+180+20+1}=\frac{1001}{2721}\approx 0{,}367879.$$

Сравнивая полученные приближения, замечаем, что у них совпадают пять десятичных знаков; поэтому можно положить $e^{-1}\approx 0{,}36788$.

3. Разложение $\operatorname{tg} x$ в цепную дробь. Имеет место следующее разложение:

$$\operatorname{tg} x = \left[0, \frac{x}{1}, -\frac{x^2}{3}, -\frac{x^2}{5}, \ldots, -\frac{x^2}{2n+1}, \ldots\right]. \tag{4.3}$$

Это разложение справедливо во всех точках непрерывности $\operatorname{tg} x$. Первыми подходящими дробями будут

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{x}{1}, \qquad \frac{P_4}{Q_4}=\frac{105x-10x^3}{105-45x^2+x^4},$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=\frac{3x}{3-x^2}, \qquad \frac{P_5}{Q_5}=\frac{945x-105x^3+x^5}{945-420x^2+15x^4}.$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{15x-x^3}{15-6x^2},$$

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь разложениями в цепную дробь, составить таблицы значений следующих функций с точностью до ε.

а) e^x, $x=0{,}155+0{,}005\,k$ $(k=0, 1, 2, \ldots, 15)$, $\varepsilon=10^{-5}$, $x=0{,}30+0{,}03\,k$ $(k=0, 1, 2, \ldots, 15)$, $\varepsilon=10^{-4}$,

б) $\operatorname{tg} x$, $x=0{,}47+0{,}01k$ $(k=0, 1, 2, \ldots, 15)$, $\varepsilon=10^{-5}$.

§ 5. Применение метода итераций для приближенного вычисления значений функций

Всякую функцию $y=f(x)$ можно различными способами задавать неявно, т. е. некоторым уравнением

$$F(x, y)=0. \tag{5.1}$$

Часто бывает, что решение уравнения (5.1) относительно y каким-либо итерационным методом сводится к однообразным операциям, легко реализуемым на ЭВМ. Тогда, очевидно, целесообразно применить метод итераций.

Один из возможных итерационных процессов для вычисления $y(x)$ можно построить следующим образом.

Пусть y_n — приближенное значение y. Применив формулу Лагранжа, получим

$$F(x, y_n) = F(x, y_n) - F(x, y) = (y_n - y) F'_y(x, \bar{y}_n),$$

где $\bar{y}_n$ — некоторое промежуточное значение между y_n и y. Отсюда

$$y = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'_y(x, \bar{y}_n)},$$

причем значение $\bar{y}_n$ нам не известно.

Полагая приближенно $\bar{y}_n \approx y_n$, получим следующую формулу для вычисления $y \approx y_{n+1}$:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'_y(x, y_n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.2}$$

Если $F'_y(x, y)$ и $F''_{yy}(x, y)$ существуют и сохраняют постоянные знаки в рассматриваемом интервале, содержащем корень $y(x)$, то итерационный процесс сходится к $y(x)$.

Начальное приближение $y_0(x)$ выбирают так, чтобы оно легко вычислялось и было, по возможности, близким к истинному значению $y(x)$.

Процесс итераций продолжается до тех пор, пока в пределах заданной точности два последовательных значения y_{n+1} и y_n не совпадут между собой, после чего приближенно полагают

$$y(x) \approx y_{n+1}.$$

1. Вычисление обратной величины. Пусть $y = 1/x$ $(x > 0)$. Положим $F(x, y) \equiv x - 1/y = 0$. Применив формулу (5.2), получим

$$y_{n+1} = y_n(2 - xy_n). \tag{5.3}$$

Вычисление y_{n+1} по полученной итерационной формуле (5.3) содержит лишь действия умножения и вычитания. Таким образом, можно находить $1/x$ на вычислительных машинах, в которых нет операции деления. Начальное значение y_0 выбирается обычно следующим образом. Записывают аргумент x в двоичной системе:

$$x = 2^m x_1,$$

где m — целое число и $1/2 \leqslant x_1 < 1$. Полагают $y_0 = 2^{-m}$; при таком выборе начального значения y_0 сходимость итерационного процесса довольно быстрая (см. [12]).

Замечание. Так как частное a/b есть произведение a на $1/b$, то деление на машинах, в которых нет операции деления, можно реализовать в два этапа:

1) вычисление $y=1/b$ (обратной величины делителя),
2) умножение y на делимое a.

Пример 5.1. С помощью формулы (5.3) найти значение функции $y=1/x$ при $x=5$ с точностью до 10^{-4}.

Решение. Запишем аргумент x в виде $x=2^3\cdot\frac{5}{8}$. Полагаем $y_0=2^{-3}=1/8$. По формуле (5.3) будем иметь

$$y_1=\frac{1}{8}\left(2-\frac{5}{8}\right)=\frac{11}{64}=0{,}1718, \quad y_2=\frac{11}{64}\left(2-\frac{55}{64}\right)=\frac{803}{4096}=0{,}1960,$$

$$y_3=0{,}1960\,(2-0{,}9800)=0{,}1960\cdot 1{,}0200=0{,}19992.$$

Мы видим, что здесь уже третье приближение дает $y(x)\approx 0{,}1999$ с точностью до 10^{-4}.

2. Вычисление квадратного корня. Пусть $y=\sqrt{x}\ (x>0)$. Преобразуем это уравнение к виду

$$F(x,\ y)\equiv y^2-x=0.$$

Применяя формулу (5.2), получим

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}\left(y_n+\frac{x}{y_n}\right) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.4}$$

Эта формула называется *формулой Герона*.

Пусть аргумент x записан в двоичной системе:

$$x=2^m x_1,$$

где m — целое число и $1/2\leqslant x_1<1$. Тогда обычно полагают

$$y_0=2^{E\,(m/2)},$$

где $E(m/2)$ — целая часть числа $m/2$.

Итерационный процесс по формуле Герона легко реализуется на машине, имеющей деление в качестве элементарной операции; при этом процесс итераций сходится при любом выборе $y_0>0$ (в этом примере легко проверить выполнение указанных выше условий сходимости, так как $F'_y=2y>0$ и $F''_{yy}=2>0$).

Если $0{,}01\leqslant x\leqslant 1$, то за начальное приближение можно брать $y_0=ax+b$; соответствующие коэффициенты a и b приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Коэффициенты для начального приближения в формуле Герона (5.4)

Интервал	a	b	Интервал	a	b
(0,01; 0,02)	4,1	0,060	(0,18; 0,30)	1,0	0,247
(0,02; 0,03)	3,2	0,078	(0,30; 0,60)	0,8	0,304
(0,03; 0,08)	2,2	0,110	(0,60; 1,00)	0,6	0,409
(0,08; 0,18)	1,4	0,174			

При таком выборе начального приближения y_0 уже вторая итерация y_2 дает значение $\sqrt{x}$ с восемью десятичными знаками после запятой, причем при вычислении y_0 можно брать значение x лишь с тремя десятичными знаками (см. [25]).

Пример 5.2. Найти $\sqrt{7}$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. Здесь $x=7=2^3\cdot\frac{7}{8}$. Следовательно, начальное приближение имеет вид

$$y_0=2^{E(3/2)}=2.$$

По формуле (5.4) последовательно находим

$$y_1=\frac{1}{2}\left(2+\frac{7}{2}\right)=2{,}75000,$$

$$y_2=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}+\frac{28}{11}\right)=2{,}64772,$$

$$y_3=\frac{1}{2}\left(\frac{233}{88}+\frac{616}{233}\right)=2{,}64575,$$

$$y_4=\frac{1}{2}\left(2{,}64575-\frac{7}{2{,}64575}\right)=2{,}64575.$$

Заметив, что в значениях y_3 и y_4 совпадают пять десятичных знаков, приближенно полагаем $\sqrt{7}\approx 2{,}64575$.

Замечание. Если вычисление ведется на вычислительной машине, система команд которой не содержит операции деления, то можно пользоваться другой итерационной формулой, а именно:

$$y_{n+1}=y_n\left(\frac{3}{2}-\frac{y_n^2}{2x}\right)\qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{5.5}$$

Извлечение квадратного корня сводится по этой формуле к однократному вычислению обратной величины $\frac{1}{2x}$ и затем к итерационному процессу, каждый этап которого содержит лишь действия умножения и вычитания. Формула (5.5) соответствует преобразованию исходного уравнения к виду $F(x,y)\equiv\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x}=0$.

3. Вычисление обратной величины квадратного корня. Пусть имеем

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\qquad (x>0).$$

Итерационная формула для вычисления обратной величины квадратного корня имеет вид

$$y_{n+1}=\frac{3}{2}y_n-\frac{1}{2}xy_n^3\qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{5.6}$$

Формула (5.6) получается при преобразовании исходного уравнения $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ к виду $F(x,y)\equiv\frac{1}{y^2}-x=0$.

В качестве начального приближения обычно берут

$$y_0 = 2^{-E\,(m/2)},$$

где $x = 2^m x_1$, $1/2 \leqslant x_1 < 1$.

Мы имеем здесь итеративный процесс также «без деления».

4. Вычисление кубического корня. Пусть имеем $y = \sqrt[3]{x}$. Применив формулу (5.2) к уравнению $F(x, y) \equiv y^3 - x = 0$, получим итерационную формулу для вычисления кубического корня в виде

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2y_n^3 + x}{y_n^2}\right); \tag{5.7}$$

начальное приближение

$$y_0 = 2^{E\,(m/3)},$$

где $x = 2^m x_1$, m — целое число и $1/2 \leqslant x_1 < 1$.

Пример 5.3. Вычислить $\sqrt[3]{5}$ с точностью до 10^{-3}.

Решение. Здесь $x = 5 = 2^3 \cdot \frac{5}{8}$. Начальное приближение

$$y_0 = 2^{E\,(3/3)} = 2,$$

$$y_1 = \frac{1}{3}\left(4 + \frac{5}{4}\right) = \frac{21}{12} = 1{,}7500.$$

Дальнейшие вычисления сведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Вычисление $\sqrt[3]{5}$

n	y_n	y_n^2	$3y_n^2$	y_n^3	$2y_n^3+5$
0	2	4	12	8	21
1	1,7500	3,0625	9,1875	5,3594	15,7188
2	1,7100	2,9241	8,7723	5,0002	15,0004
3	1,7100				

Таким образом, $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}710$.

5. Вычисление корня p-й степени. Пусть

$$y = \sqrt[p]{x},$$

где $x > 0$ и $p > 0$ — целое число.

Применив формулу (5.2) к уравнению $F(x, y) \equiv 1 - \frac{x}{y^p} = 0$, получим

$$y_{n+1} = y_n\left[\left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{y_n^p}{px}\right]. \tag{5.8}$$

Итерационный процесс будет сходящимся, если только начальное приближение $y_0 > 0$ выбрать настолько малым, чтобы $y_0^p < (p+1)x$.

6. Формула Ньютона для вычисления корня *p*-й степени. Пусть $y = \sqrt[p]{x}$; тогда имеет место формула

$$y_{n+1} = \frac{1}{p}\left[(p-1)\,y_n + \frac{x}{y_n^{p-1}}\right], \tag{5.9}$$

получающаяся из формулы (5.2) при $F(x, y) \equiv y^p - x$.

Начальное приближение y_0 можно подобрать с точностью до одной-двух значащих цифр.

При $p = 2$ из формулы Ньютона получаем формулу Герона.

Пример 5.4. Вычислить $y = \sqrt[7]{277\,234}$ с точностью до 10^{-6}.

Решение. Возьмем $y_0 = 6$; по формуле (5.8) последовательно вычисляем:

$$y_1 = 6\left[\left(1 + \frac{1}{7}\right) - \frac{6^7}{7\cdot 277\,234}\right] = 5{,}99164605,$$

$$y_2 = 5{,}99169225, \quad y_3 = 5{,}99169225.$$

Ответ: $\sqrt[7]{277\,234} \approx 5{,}991692$.

Пример 5.5. Вычислить $y = \sqrt[4{,}78]{16234}$ с точностью до 10^{-6}.

Решение. Возьмем $y_0 = 7$, тогда по формуле (5.9) будем иметь

$$y_1 = \frac{1}{4{,}78}\left[(4{,}78 - 1)\cdot 7 + \frac{16\,234}{7\cdot 3{,}78}\right] = 7{,}70590133,$$

$y_2 = 7{,}60319046$, $y_3 = 7{,}60050180$, $y_4 = 7{,}60050001$, $y_5 = 7{,}60050001$. Таким образом, с точностью до 10^{-6} получаем

$$\sqrt[4{,}78]{16\,234} \approx 7{,}600500.$$

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь методом итераций, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-6}.

а) $1/x$, $x = 3 + 2k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$, б) $1/x^2$ для тех же значений x, в) $1/x^3$ для тех же значений x, г) $\frac{x}{1+x}$, $x = 0{,}007 + 0{,}003k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$.

2. Пользуясь методом итераций, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-5}.

а) $\sqrt{x}$, $x = 2 + k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$,

б) $x\sqrt{x}$ для тех же значений x,

в) $\sqrt{1 + x^2}$, $x = 0{,}3 + 0{,}002k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$,

г) $\sqrt{x^2 + 1}/x$ для тех же значений x.

3. Пользуясь методом итераций, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-5}.

а) $1/\sqrt{x}$, $x = 3 + 2k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 15)$, б) $1/\sqrt{2+x^2}$, $x=0,3+0,002\,k$ $(k=0,1,2,\ \ldots,\ 15)$,

в) $(2x+1)/\sqrt{x}$, $x=3,1+0,005k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 15)$,

г) $1/\sqrt{x(x+1)}$, $x=2,3+0,002k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 15)$.

4. Пользуясь методом итераций, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-6}.

а) $\sqrt[3]{x}$, $x=3+k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 15)$,

б) $1/\sqrt[3]{x}$ для тех же значений x.

5. Пользуясь методом итераций, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-6}.

а) $\sqrt[4]{x}$, $x=0,05+0,02k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 15)$,

б) $\sqrt[5]{x}$ для тех же значений x,

в) $\sqrt[6]{x}$ для тех же значений x,

г) $\sqrt[7]{x}$ для тех же значений x.

ГЛАВА III

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Основные понятия

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n, \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

или в матричной форме

$$Ax=b, \tag{1.2}$$

где

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица коэффициентов,

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

— столбец свободных членов и столбец неизвестных соответственно.

Если матрица A неособенная, т. е.

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (1.1) имеет единственное решение. В этом случае решение системы (1.1) с теоретической точки зрения не представляет труда. Значения неизвестных x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ могут быть получены по известным формулам Крамера

$$x_i=\frac{\det A_i}{\det A},$$

где матрица A_i получается из матрицы A заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов.

Но такой способ решения линейной системы с n неизвестными приводит к вычислению $n+1$ определителей порядка n, что представляет собой весьма трудоемкую операцию при сколько-нибудь большом числе n.

Применяемые в настоящее время методы решения линейных систем можно разбить на две группы: точные и приближенные.

Точными методами называются такие методы, которые в предположении, что вычисления ведутся точно (без округлений), приводят к точным значениям неизвестных x_i. Так как на практике все вычисления ведутся с округлениями, то и значения неизвестных, полученные точным методом, неизбежно будут содержать погрешности. К точным методам относятся, например, метод Гаусса, метод квадратных корней.

Приближенными методами называются такие методы, которые даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить решение системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ лишь с заданной точностью. Точное решение системы в этих случаях может быть получено теоретически как результат бесконечного процесса. К приближенным методам относятся метод простой итерации, метод Зейделя и др. Каждый из этих методов не всегда является сходящимся в применении к конкретному классу систем линейных уравнений.

§ 2. Метод Гаусса

Наиболее распространенным методом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод Гаусса, в основе которого лежит идея последовательного исключения неизвестных. Существуют различные вычислительные схемы, реализующие этот метод. Рассмотрим одну из них — *схему единственного деления.*

Для простоты ограничимся рассмотрением системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=a_{15},\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=a_{25},\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=a_{35},\\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=a_{45}. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Пусть $a_{11}\neq 0$ (ведущий элемент). Разделив первое уравнение системы (2.1) на a_{11}, получим

$$x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15}, \tag{2.2}$$

где

$$b_{1j}=\frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad (j=2,3,4,5).$$

Пользуясь уравнением (2.2), можно исключить неизвестное x_1 из второго, третьего и четвертого уравнений системы (2.1). Для этого следует умножить уравнение (2.2) на a_{21}, a_{31} и a_{41} и вычесть результаты соответственно из второго, третьего и четвертого уравнений системы.

В результате получим систему трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+a_{24}^{(1)}x_4=a_{25}^{(1)},\\ a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3+a_{34}^{(1)}x_4=a_{35}^{(1)},\\ a_{42}^{(1)}x_2+a_{43}^{(1)}x_3+a_{44}^{(1)}x_4=a_{45}^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

где коэффициенты $a_{ij}^{(1)}$ вычисляются по формуле

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \qquad (i=2, 3, 4; \quad j=2, 3, 4, 5). \tag{2.4}$$

Далее первое уравнение системы (2.3) делим на $a_{22}^{(1)}$, получим

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}, \tag{2.5}$$

$$\text{где } b_{2j}^{(1)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \qquad (j=3, 4, 5).$$

Исключая теперь x_2 так же, как мы исключали x_1, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)}, \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

где

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(1)} \qquad (i=3, 4; \ j=3, 4, 5). \tag{2.7}$$

Разделив первое уравнение системы (2.6) на $a_{33}^{(2)}$, получим

$$x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)}, \tag{2.8}$$

где $b_{3j}^{(2)} = \dfrac{a_{3j}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \qquad (j=4, 5).$

С помощью этого уравнения исключим x_3 из второго уравнения системы (2.6). Получим уравнение

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)},$$

где

$$a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)}b_{3j}^{(2)} \qquad (j=4, 5). \tag{2.9}$$

Таким образом, систему (2.1) мы привели к эквивалентной системе с *треугольной матрицей*:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \\ x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}, \\ x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)}, \\ a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)}, \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

откуда последовательно находим

$$\left.\begin{aligned} & x_4 = a_{45}^{(3)}/a_{44}^{(3)}, \quad x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4, \\ & x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)}x_4 - b_{23}^{(1)}x_3, \\ & x_1 = b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Итак, решение системы распадается на два этапа:

прямой ход

— приведение системы (2.1) к треугольному виду (2.10);

обратный ход

— определение неизвестных по формулам (2.11).

Очевидно, рассмотренный метод применим лишь при условии, что все «ведущие элементы» отличны от нуля. Если же какой-либо из них обращается в нуль, то в соответствующей системе достаточно провести перестановку уравнений с тем, чтобы сделать «ведущий элемент» отличным от нуля (разумеется, в предположении, что матрица A неособенная).

Число N арифметических операций, необходимых для реализации метода Гаусса, определяется следующей формулой (см. [2], [12]):

$$N = \frac{2n(n+1)(n+2)}{3} + n(n-1),$$

где n — число неизвестных.

Таким образом, время, необходимое для выполнения арифметических операций при решении системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, примерно пропорционально кубу числа неизвестных.

Пример 2.1. Методом Гаусса решить систему

$$\left.\begin{aligned} 2{,}0x_1 + 1{,}0x_2 - 0{,}1x_3 + 1{,}0x_4 &= 2{,}7, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 4{,}0x_3 - 8{,}5x_4 &= 21{,}9, \\ 0{,}3x_1 - 1{,}0x_2 + 1{,}0x_3 + 5{,}2x_4 &= -3{,}9, \\ 1{,}0x_1 + 0{,}2x_2 + 2{,}5x_3 - 1{,}0x_4 &= 9{,}9. \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

Решение. Прямой ход. Разделив первое уравнение системы (2.12) на $a_{11} = 2$, получим

$$x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}05x_3 + 0{,}5x_4 = 1{,}35.$$

Следовательно, $b_{12} = 0{,}5$; $b_{13} = -0{,}05$; $b_{14} = 0{,}5$; $b_{15} = 1{,}35$. По формулам (2.4) вычисляем коэффициенты $a_{ij}^{(1)}$ и составляем систему (2.3). Так, при $i = 2$ имеем

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{21}b_{12} = 0{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}3,$$
$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{13} = 4 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 4{,}02,$$
$$a_{24}^{(1)} = a_{24} - a_{21}b_{14} = -8{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}5 = -8{,}7.$$
$$a_{25}^{(1)} = a_{25} - a_{21}b_{15} = 21{,}9 - 0{,}4 \cdot 1{,}35 = 21{,}36.$$

Вычисления при $i = 3, 4$ ведутся аналогично. Таким образом, получаем систему с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} 0{,}3x_2 + 4{,}02x_3 - 8{,}7x_4 &= 21{,}36, \\ -1{,}15x_2 + 1{,}015x_3 + 5{,}05x_4 &= -4{,}305, \\ -0{,}3x_2 + 2{,}55x_3 - 1{,}5x_4 &= 8{,}55. \end{aligned}$$

Разделив первое уравнение полученной системы на $a_{22}^{(1)} = 0{,}3$, записываем:

$$x_2 + 13{,}40x_3 - 29{,}00x_4 = 71{,}20,$$

где $b_{23}^{(1)} = 13{,}40$, $b_{24}^{(1)} = -29{,}00$, $b_{25}^{(1)} = 71{,}20$.

По формулам (2.7) вычисляем коэффициенты $a_{ij}^{(2)}$ и составляем систему (2.6). При $i=3$ имеем

$$a_{33}^{(2)}=a_{33}^{(1)}-a_{32}^{(1)}b_{23}^{(1)}=1{,}015+1{,}15\cdot 13{,}40=16{,}425,$$
$$a_{34}^{(2)}=a_{34}^{(1)}-a_{32}^{(1)}b_{24}^{(1)}=5{,}05-1{,}15\cdot 29{,}00=-28{,}300,$$
$$a_{35}^{(2)}=a_{35}^{(1)}-a_{32}^{(1)}b_{25}^{(1)}=-4{,}305+1{,}15\cdot 71{,}20=77{,}575.$$

Вычисления при $i=4$ ведутся аналогично. Записываем систему с двумя неизвестными:

$$16{,}425x_3-28{,}300x_4=77{,}575,$$
$$6{,}570x_3-10{,}200x_4=29{,}910.$$

Разделив первое уравнение этой системы на $a_{33}^{(2)}=16{,}425$, получаем

$$x_3-1{,}72298x_4=4{,}72298,$$

где $b_{34}^{(2)}=-1{,}72298$; $b_{35}^{(2)}=4{,}72298$.

По формулам (2.9) находим коэффициенты $a_{4j}^{(3)}$:

$$a_{44}^{(3)}=a_{44}^{(2)}-a_{43}^{(2)}b_{34}^{(2)}=-10{,}200+6{,}570\cdot 1{,}72298=1{,}11998,$$
$$a_{45}^{(3)}=a_{45}^{(2)}-a_{43}^{(2)}b_{35}^{(2)}=29{,}910-6{,}570\cdot 4{,}72298=-1{,}11998,$$

и записываем одно уравнение с одним неизвестным:

$$1{,}11998x_4=-1{,}11998.$$

Таким образом, эквивалентная система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1+0{,}5x_2-0{,}05x_3+0{,}5x_4&=1{,}35,\\ x_2+13{,}40x_3-29{,}00x_4&=71{,}20,\\ x_3-1{,}72298x_4&=4{,}72298,\\ 1{,}11998x_4&=-1{,}11998. \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

На этом прямой ход заканчивается.

Обратный ход. Последовательно из системы (2.13) находим

$$x_4=-1{,}00000,$$
$$x_3=4{,}72298-1{,}72298=3{,}00000,$$
$$x_2=71{,}20-13{,}40\cdot 3+29{,}0=2{,}00000,$$
$$x_1=1{,}35-0{,}5\cdot 2+0{,}05\cdot 3+0{,}5=1{,}00000.$$

Так как в ходе решения все вычисления производились без округлений, то полученные значения неизвестных являются точными.

При вычислениях могут произойти ошибки. Поэтому необходим контроль вычислений. Одна из наиболее простых схем контроля основана на том, что увеличение значений всех неизвестных на единицу равносильно замене данной системы (2.1) контрольной системой, в которой свободные члены равны суммам всех коэффициентов соответствующей строки, например:

$$a_{16}=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}.$$

Решая вместе с данной также и контрольную систему, мы получаем возможность контролировать попутно каждый шаг расчета, как будет показано ниже в конкретных схемах.

§ 3. Компактная схема Гаусса. Модификация Краута — Дулитла

1. Компактная схема Гаусса. Если вычисления по схеме единственного деления ведутся с помощью клавишных вычислительных машин, то много времени тратится на запись промежуточных результатов. Компактная схема Гаусса (см. [2]) дает экономный способ записи. Рассмотрим порядок составления схемы для системы (2.1). Все результаты вычислений будем записывать в одну таблицу (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Компактная схема Гаусса

	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\Sigma=a_{i6}$
I	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\sum a_{1j}=a_{16}$
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\sum a_{2j}=a_{26}$
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\sum a_{3j}=a_{36}$
	4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\sum a_{4j}=a_{46}$
		1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	$a_{16}/a_{11}=b_{16}$
II	2		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$
	3		$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$
	4		$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$
			1	$b_{23}^{(1)}$	$b_{24}^{(1)}$	$b_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}/a_{22}^{(1)}=b_{26}^{(1)}$
III	3			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$
	4			$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$
				1	$b_{34}^{(2)}$	$b_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}/a_{33}^{(2)}=b_{36}^{(2)}$
IV	4				$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$
V					1	x_4	$\bar{x}_4$
				1		x_3	$\bar{x}_3$
			1			x_2	$\bar{x}_2$
		1				x_1	$\bar{x}_1$

Порядок заполнения таблицы.

Прямой ход.

1) Записываем коэффициенты данной системы в четырех строках и пяти столбцах раздела I табл. 3.1.

2) Суммируем все коэффициенты по строке и записываем сумму в столбце Σ (столбец контроля), например, $a_{16}=\sum_{j=1}^{5} a_{1j}$.

3) Делим все числа, стоящие в первой строке, на a_{11} и результаты $b_{1j}=a_{1j}/a_{11}$ записываем в пятой строке раздела I.

4) Вычисляем $\sum_{j=1}^{5} b_{1j}$ и делаем проверку. Если вычисления ведутся с постоянным числом знаков после запятой, то числа b_{16} и $\sum_{j=1}^{5} b_{1j}$ не должны отличаться более чем на единицу последнего разряда. В противном случае следует проверить действия пункта 3).

5) По формулам (2.4) вычисляем коэффициенты

$$a_{ij}^{(1)} \qquad (i=2,\ 3,\ 4;\ j=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6).$$

Как правило, возможности клавишных вычислительных машин позволяют вести вычисления по формулам (2.4) без записи произведения $a_{i1}b_{1j}$.

Результаты записываем в первые три строки раздела II.

6) Делаем проверку. Сумма элементов каждой строки $\sum_{j=2}^{5} a_{ij}^{(1)}$ $(i=2,\ 3,\ 4)$ не должна отличаться от $a_{i6}^{(1)}$ более чем на единицу последнего разряда (если все вычисления ведутся с постоянным числом знаков после запятой).

7) Делим все элементы первой строки раздела II на $a_{22}^{(1)}$ и результаты записываем в четвертой строке раздела II.

8) Делаем проверку, как в пункте 4).

9) По формуле (2.7) вычисляем $a_{ij}^{(2)}$ $(i=3,\ 4;\ j=3,\ 4,\ 5)$. Результаты записываем в первые две строки раздела III.

10) Делаем проверку, как в пункте 6).

11) Делим элементы первой строки раздела III на $a_{33}^{(2)}$ и находим числа $b_{3j}^{(2)}=a_{3j}^{(2)}/a_{33}^{(2)}$. Все результаты записываем в третьей строке раздела III.

12) Делаем проверку.

13) Вычисляем $a_{4j}^{(3)}=a_{4j}^{(2)}-a_{43}^{(2)}b_{3j}^{(2)}$. Результаты записываем в разделе IV.

Обратный ход.

1) В разделе V записываем единицы, как это указано в табл. 3.1.

2) Вычисляем $x_4=a_{45}^{(3)}/a_{44}^{(3)}$.

3) Для вычисления значений x_3, x_2, x_1 используются лишь строки разделов I, II, III, содержащие единицы (*отмеченные строки*), начиная с последней. Так, для вычисления x_3 умножаем x_4 на $b_{34}^{(2)}$ и

результат вычитаем из $b_{35}^{(2)}$. При этом единицы, расставленные в разделе V, помогают находить для x_i $(i=3, 2, 1)$ соответствующие коэффициенты в отмеченных строках.

Таким образом,

$$x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)} x_4.$$

4) Вычисляем x_2, для чего используем элементы отмеченной строки раздела II:

$$x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)} x_4 - b_{23}^{(1)} x_3.$$

5) Вычисляем x_1, для чего используем элементы отмеченной строки раздела I:

$$x_1 = b_{15} - b_{14} x_4 - b_{13} x_3 - b_{12} x_2.$$

Аналогично проводится обратный ход в контрольной системе. Решения этой системы должны отличаться от решений данной системы на 1 (с точностью до единицы последнего разряда):

$$\bar{x}_i = x_i + 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Этот контроль осуществляется с помощью столбца Σ.

Таким же образом реализуется компактная схема Гаусса для систем с другим числом неизвестных. Компактная схема Гаусса оказывается особенно выгодной при одновременном решении нескольких систем, отличающихся лишь столбцами свободных членов, что имеет место, например, при вычислении элементов обратной матрицы (см. § 8).

Пример 3.1. Решить систему (2.12) по компактной схеме Гаусса.

Решение. Так как все вычисления были проведены в § 2, рассмотрим только порядок заполнения таблицы с одновременным осуществлением контроля вычислений.

Прямой ход.

1) Записываем коэффициенты системы a_{ij} для $i=1, 2, 3, 4, 5$; $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$ в первом разделе табл. 3.2.

2) Вычисляем суммы коэффициентов по строке. Так, при $i=1$ имеем

$$\sum_{j=1}^{5} a_{1j} = 2{,}0 + 1{,}0 - 0{,}1 + 1{,}0 + 2{,}7 = 6{,}6;$$

результат записываем в первой строке столбца Σ; и т. д.

3) Делим элементы первой строки на $a_{11} = 2{,}0$ и записываем результаты в пятой строке раздела I.

4) Контроль: вычисляем сумму первых пяти чисел, полученных в п. 3), получаем 3,30, что полностью совпадает с числом, полученным в столбце Σ.

5) Находим числа $a_{ij}^{(1)}$ $(i=2, 3, 4;\ j=2, 3, 4, 5, 6)$ и записываем в разделе II.

6) К о н т р о л ь: суммируем полученные коэффициенты по каждой строке. Так, при $i=2$ имеем $\sum\limits_{j=2}^{5} a_{2j}^{(1)}=16{,}98$. Результат совпадает с контрольным числом.

7) Делим элементы первой строки раздела II на $a_{22}^{(1)}=0{,}3$. Результат записываем в последней строке раздела.

8) К о н т р о л ь: сумма $1+b_{23}^{(1)}+b_{24}^{(1)}+b_{25}^{(1)}=56{,}60=b_{26}^{(1)}$.

9) Определяем числа $a_{ij}^{(2)}$ ($i=3,\ 4;\ j=3,\ 4,\ 5,\ 6$) и записываем в разделе III.

10) К о н т р о л ь: при $i=3$ имеем $a_{33}^{(2)}+a_{34}^{(2)}+a_{35}^{(2)}=65{,}700=a_{36}^{(2)}$; при $i=4$ имеем $a_{43}^{(2)}+a_{44}^{(2)}+a_{45}^{(2)}=26{,}280=a_{46}^{(2)}$.

Т а б л и ц а 3.2

Компактная схема Гаусса для системы (2.12)

	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\Sigma=a_{i6}$
I	1	2,0	1,0	—0,1	1,0	2,7	6,6
	2	0,4	0,5	4,0	—8,5	21,9	18,3
	3	0,3	—1,0	1,0	5,2	—3,9	1,6
	4	1,0	0,2	2,5	—1,0	9,9	12,6
		1	0,50	—0,05	0,50	1,35	3,30
II	2		0,30	4,02	—8,70	21,36	16,98
	3		—1,15	1,015	5,05	—4,305	0,610
	4		—0,30	2,55	—1,50	8,55	9,300
			1	13,40	—29,00	71,20	56,60
III	3			16,425	—28,300	77,575	65,700
	4			6,570	—10,200	29,910	26,280
				1	—1,72298	4,72298	4,00000
IV	4				1,11998	—1,11998	0
V					1	—1,00000	0,00000
				1		3,00000	4,00000
			1			2,00000	3,00000
		1				1,00000	2,00000

11) Делим элементы первой строки раздела III на $a_{33}^{(2)}=16{,}425$. Записываем результат в разделе IV.

12) К о н т р о л ь: $1+b_{44}^{(2)}+b_{45}^{(2)}=4{,}00000=b_{46}^{(2)}$.

13) Вычисляем $a_{4j}^{(3)}$ $(j=4,\ 5,\ 6)$. Результат записываем в разделе IV.

14) Контроль: $a_{44}^{(3)}+a_{45}^{(3)}=0=a_{46}^{(3)}$.

Обратный ход. Следуя порядку действий, указанному в пп. 1)—5), при осуществлении обратного хода, получаем значения неизвестных

$$x_4=-1{,}00000;\ x_3=3{,}00000;\ x_2=2{,}00000;\ x_1=1{,}00000.$$

Решение контрольной системы:

$$\bar{x}_4=0{,}00000;\ \bar{x}_3=4{,}00000;\ \bar{x}_2=3{,}00000,\ \bar{x}_1=2{,}00000.$$

Сравнение полученных решений показывает, что ошибки в вычислениях нет.

2. Модификация Краута — Дулитла. Если учесть некоторые возможности клавишных вычислительных машин (накопление суммы произведений $\sum a_i b_i$ независимо от знака каждого из слагаемых, перенос чисел из регистра произведения в регистр делимого и наоборот), то можно составить схему вычислений, позволяющую еще больше сократить записи промежуточных результатов по сравнению с компактной схемой Гаусса (см. [56]). Все вычисления по этой схеме записываются в одну таблицу (табл. 3.3). Для простоты рассмотрим порядок заполнения модифицированной схемы для системы с четырьмя неизвестными.

Порядок заполнения таблицы.

Прямой ход.

1) Записываем коэффициенты системы a_{ij} для $i=1,2,3,4$; $j=1,2,3,4,5$ в разделе I табл. 3.3.

2) Суммируем коэффициенты по каждой строке и результаты заносим в столбец Σ в качестве a_{i6} $(i=1,2,3,4)$.

3) При $i=2,3,4$ находим числа

$$m_{i1}=a_{i1}/a_{11}$$

и записываем их в разделе II.

4) При $j=2,3,4,5,6$ вычисляем коэффициенты $a_{2j}^{(1)}$ по формуле $a_{2j}^{(1)}=a_{2j}-m_{21}a_{1j}$ и записываем их в разделе III.

5) Контроль: сумма $\sum\limits_{j=2}^{5} a_{2j}^{(1)}$ не должна отличаться от $a_{26}^{(1)}$ более чем на единицу последнего разряда (если вычисления ведутся с постоянным числом знаков после запятой).

6) При $i=3,4$ находим числа m_{i2} по формуле

$$m_{i2}=(a_{i2}-m_{i1}a_{12})/a_{22}^{(1)}$$

и заносим в раздел IV.

7) При $j=3,4,5,6$ вычисляем коэффициенты $a_{3j}^{(2)}$ по формуле

$$a_{3j}^{(2)}=a_{3j}-m_{31}a_{1j}-m_{32}a_{2j}^{(1)}$$

и записываем в раздел V.

Таблица 3.3

Схема Краута — Дулитла

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\Sigma = a_{i6}$
I	a_{11} a_{21} a_{31} a_{41}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42}	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45}	$a_{16} = \sum a_{1j}$ $a_{26} = \sum a_{2j}$ $a_{36} = \sum a_{3j}$ $a_{46} = \sum a_{4j}$
II	m_{21} m_{31} m_{41}					
III		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$
IV		m_{32} m_{42}				
V			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$
VI			m_{43}			
VII				$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$
VIII	1	1	1	1	x_4 x_3 x_2 x_1	$\bar{x}_4$ $\bar{x}_3$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_1$

8) Контроль: сравниваем $\sum_{j=3}^{5} a_{3j}^{(2)}$ с числом $a_{36}^{(2)}$.

9) Находим число

$$m_{43} = (a_{43} - m_{41}a_{13} - m_{42}a_{23}^{(1)})/a_{33}^{(2)}$$

и записываем его в раздел VI.

10) При $j = 4, 5, 6$ находим коэффициенты $a_{4j}^{(3)}$ по формуле

$$a_{4j}^{(3)} = a_{4j} - m_{41}a_{1j} - m_{42}a_{2j}^{(1)} - m_{43}a_{3j}^{(2)}$$

и записываем в раздел VII.

11) Контроль: сравниваем сумму $a_{44}^{(3)}+a_{45}^{(3)}$ с числом $a_{46}^{(3)}$.

Обратный ход. Последовательно находим числа x_4, x_3, x_2, x_1 по формулам

$$\begin{aligned} a_{44}^{(3)}x_4 &= a_{45}^{(3)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 &= a_{35}^{(2)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 &= a_{25}^{(1)}, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15}. \end{aligned}$$

Вычисления по этим формулам ведутся без промежуточных записей. Результаты записываются в разделе VIII таблицы. Там же записывают и решения контрольной системы. Контроль осуществляется так же, как на стр. 50.

Количество арифметических операций в приведенной схеме и в схеме метода исключения Гаусса одинаково, поскольку операции выполняются те же самые, хотя и в другом порядке, но записи промежуточных вычислений значительно сокращаются. Последнее обстоятельство имеет большое значение при работе с клавишными вычислительными машинами.

ЗАДАЧИ

Решить системы, пользуясь компактной схемой Гаусса или схемой Краута—Дулитла. Расчеты вести с пятью знаками после запятой.

1. $A=\begin{pmatrix} 3,2 & -1,5 & 0,5 \\ 1,6 & 2,5 & -1,0 \\ 1,0 & 4,1 & -1,5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0,90 \\ 1,55 \\ 2,08 \end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix} 1,5 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,5 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix} 2,1 & -4,5 & -2,0 \\ 3,0 & 2,5 & 4,3 \\ -6,0 & 3,5 & 2,5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 19,07 \\ 3,21 \\ -18,25 \end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix} 3,0 & -2,0 & 5,3 & -2,1 & 1,0 \\ 1,0 & 4,0 & -6,0 & 4,5 & -6,0 \\ 3,0 & 6,0 & -7,3 & -9,0 & 3,4 \\ -2,0 & -3,0 & 1,0 & -4,0 & 6,0 \\ 1,0 & -4,0 & 6,5 & 1,0 & -3,0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 28,3 \\ -36,2 \\ 24,5 \\ 16,2 \\ 4,3 \end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix} 8,64-\alpha & 1,71 & 5,42 \\ -6,39 & 4,25 & 1,84+\alpha \\ 4,21 & 7,92-\alpha & -3,41 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 10,21-\beta \\ 3,41+\beta \\ 12,29 \end{pmatrix},$

$\alpha=0,5\cdot k$, $k=0, 1, \ldots, 4$, $\beta=0,2\cdot k$, $k=0,1, \ldots, 5$.

6. $A=\begin{pmatrix} 8,30 & 2,62+\alpha & 4,10 & 1,90 \\ 3,92 & 8,45 & 7,78-\alpha & 2,46 \\ 3,77 & 7,21+\alpha & 8,04 & 2,28 \\ 2,21 & 3,65-\alpha & 1,69 & 6,99 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -10,65+\beta \\ 12,21 \\ 15,45-\beta \\ -8,35 \end{pmatrix},$

$\alpha=0,2\cdot k$, $k=0, 1, \ldots, 4$, $\beta=0,2\cdot k$, $k=0, 1, \ldots, 5$.

§ 4. Схема Гаусса с выбором главного элемента

Рассмотрим линейную систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=a_{1,\,n+1}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=a_{2,\,n+1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=a_{n,\,n+1}. \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

Запишем расширенную прямоугольную матрицу коэффициентов системы

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1q} & \ldots & a_{1n} & a_{1,\,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \ldots & a_{pq} & \ldots & a_{pn} & a_{p,\,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nq} & \ldots & a_{nn} & a_{n,\,n+1} \end{pmatrix}.$$

Среди элементов матрицы a_{ij} $(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$ выберем наибольший по модулю, называемый *главным элементом*. Пусть им будет, например, элемент a_{pq}. Строка с номером p, содержащая главный элемент, называется *главной строкой*.

Далее вычисляем множители

$$m_i=a_{iq}/a_{pq}$$

для всех $i\neq p$.

Затем преобразуем матрицу следующим образом: из каждой i-й неглавной строки вычитаем почленно главную строку, умноженную на m_i. В результате получим матрицу, у которой все элементы q-го столбца, за исключением a_{pq}, равны нулю. Отбрасывая этот столбец и главную строку, получим новую матрицу M_1 с меньшим на единицу числом строк и столбцов.

Над матрицей M_1 повторяем те же операции, после чего получим матрицу M_2, и т. д. Такие преобразования продолжаем до тех пор, пока не получим матрицу, содержащую одну строку из двух элементов, которую считаем тоже главной. Затем объединяем все главные строки, начиная с последней. После некоторой перестановки они образуют треугольную матрицу, эквивалентную исходной. На этом заканчивается этап вычислений, называемый *прямым ходом*. Решив систему с полученной треугольной матрицей коэффициентов, найдем последовательно значения неизвестных x_i $(i=1,2,\ \ldots,\ n)$. Этот этап вычислений называется *обратным ходом*. Все описанные вычисления можно расположить в одной таблице, аналогично компактной схеме Гаусса, и на каждом этапе проводить рассмотренный выше контроль вычислений (см. пример 4.1).

Смысл выбора главного элемента состоит в том, чтобы сделать возможно меньшими числа m_i и тем самым уменьшить погрешность вычислений. Поэтому при реализации метода Гаусса на ЭВМ обычно используют схему с выбором главного элемента.

Замечание. При работе на ЭВМ выбор главного элемента может оказаться достаточно трудоемкой задачей, если число уравнений системы велико. Поэтому практически в качестве главной строки берут первую строку, а в качестве главного элемента — наибольший по модулю элемент этой строки.

Пример 4.1. Пользуясь схемой Гаусса с выбором главного элемента, решить систему

$$1{,}1161x_1+0{,}1254x_2+0{,}1397x_3+0{,}1490x_4=1{,}5471,$$
$$0{,}1582x_1+1{,}1675x_2+0{,}1768x_3+0{,}1871x_4=1{,}6471,$$
$$0{,}1968x_1+0{,}2071x_2+1{,}2168x_3+0{,}2271x_4=1{,}7471,$$
$$0{,}2368x_1+0{,}2471x_2+0{,}2568x_3+1{,}2671x_4=1{,}8471.$$

Решение. Результаты всех вычислений удобно записывать в одну таблицу (табл. 4.1) в следующем порядке.

Таблица 4.1

Схема Гаусса с выбором главного элемента

	i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\Sigma=a_{i6}$
I	1	0,11759	1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
	2	0,14766	0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33760
	3	0,17923	0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
	4		0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490
II	1	0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
	2	0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
	3		0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
III	1	0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
	2		0,10492	1,11170			1,20639	2,42301
IV	1		1,06616				1,10944	2,17560
V	1		1				1,04059	2,04059
	2			1			0,98697	1,98697
	3				1		0,93505	1,93505
	4					1	0,88130	1,88130

Прямой ход.

1) Записываем в первом разделе таблицы коэффициенты системы

$$a_{ij} \qquad (i=1,2,3,4;\ j=1,2,3,4,5).$$

2) В столбце $\Sigma=a_{i6}$ записываем суммы коэффициентов по каждой строке.

3) Находим главный элемент. В данной системе им будет коэффициент $a_{44}=1{,}26710$ $(p=4,\ q=4)$, подчеркиваем его.

4) Находим числа m_i $(i=1, 2, 3)$. Для этого делим элементы столбца a_{i4} на a_{44} и результаты записываем в столбце m_i раздела I:

$$m_1=\frac{a_{14}}{a_{44}}=\frac{0,14900}{1,26710}=0,11759; \qquad m_2=\frac{a_{24}}{a_{44}}=\frac{0,18710}{1,26710}=0,14766;$$

$$m_3=\frac{a_{34}}{a_{44}}=\frac{0,22710}{1,26710}=0,17923.$$

5) Вычисляем коэффициенты новой матрицы. Из каждой строки i $(i=1,\ 2,\ 3)$ вычитаем главную строку, умноженную на соответствующий элемент m_i.

Так, при $i=1$ будем иметь

$$a_{11}^{(1)}=a_{11}-m_1a_{41}=1,11610-0,11759\cdot 0,23680=1,08825,$$
$$a_{12}^{(1)}=a_{12}-m_1a_{42}=0,12540-0,11759\cdot 0,24710=0,09634,$$
$$a_{13}^{(1)}=a_{13}-m_1a_{43}=0,13970-0,11759\cdot 0,25680=0,10950,$$
$$a_{14}^{(1)}=0,$$
$$a_{15}^{(1)}=a_{15}-m_1a_{45}=1,54710-0,11759\cdot 1,84710=1,32990,$$
$$a_{16}^{(1)}=a_{16}-m_1a_{46}=3,07730-0,11759\cdot 3,85490=2,62399.$$

При $i=2,\ 3$ продолжаем вычисления аналогичным образом. Результаты записываем в разделе II. При этом уже не выписываем главную строку, а также столбец a_{i4}, так как он состоит из нулей.

6) Контроль: находим суммы $\sum\limits_{j=1}^{5} a_{ij}^{(1)}$ и сравниваем с $a_{i6}^{(1)}$, например, $\sum\limits_{j=1}^{5} a_{1j}=2,62399=a_{16}^{(1)}$ и т. д.

7) Выбираем главный элемент, подчеркиваем его. В нашем случае это будет $a_{33}^{(1)}=1,17077$.

8) Делим элементы столбца a_{i3} на $a_{33}^{(1)}$. Получаем числа

$$m_1^{(1)}=\frac{a_{13}^{(1)}}{a_{33}^{(1)}}=\frac{0,10950}{1,17077}=0,09353; \qquad m_2^{(1)}=\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{33}^{(1)}}=\frac{0,13888}{1,17077}=0,11862.$$

9) Вычисляем коэффициенты $a_{ij}^{(2)}$. Для этого из каждой строки i $(i=1,\ 2)$ вычитаем главную строку, умноженную на соответствующее m_i. Так, при $i=1$ будем иметь

$$a_{11}^{(2)}=a_{11}^{(1)}-m_1^{(1)}a_{31}^{(1)}=1,08825-0,09353\cdot 0,15436=1,07381,$$
$$a_{12}^{(2)}=a_{12}^{(1)}-m_1^{(1)}a_{32}^{(1)}=0,09634-0,09353\cdot 0,16281=0,08111,$$
$$a_{13}^{(2)}=a_{13}^{(1)}-m_1^{(1)}a_{33}^{(1)}=0,$$
$$a_{15}^{(2)}=a_{15}^{(1)}-m_1^{(1)}a_{35}^{(1)}=1,32990-0,09353\cdot 1,41604=1,19746,$$
$$a_{16}^{(2)}=a_{16}^{(1)}-m_1^{(1)}a_{36}^{(1)}=2,62399-0,09353\cdot 2,90398=2,35238.$$

При $i=2$ вычисления ведутся аналогично. Результаты записываем в разделе III, оставляя свободными уже столбцы a_{i3} и a_{i4}.

10) Контроль: сумма $\sum\limits_{j=1}^{5} a_{ij}$ $(i=1,\ 2)$ должна равняться a_{i6}; это условие выполняется.

11) Выбираем главный элемент, подчеркиваем его. Им будет теперь $a_{22}^{(2)} = 1,11170$.

12) Находим $m_1^{(2)} = a_{12}^{(2)}/a_{22}^{(2)} = 0,08111/1,11170 = 0,07296$. Записываем в столбце m_i раздела III.

13) Из первой строки вычитаем вторую (главную) строку, умноженную на $m_1^{(2)}$. Получаем

$$a_{11}^{(3)} = a_{11}^{(2)} - m_1^{(2)} a_{21}^{(2)} = 1,07381 - 0,10492 \cdot 0,07296 = 1,06616,$$
$$a_{12}^{(3)} = a_{12}^{(2)} - m_1^{(2)} a_{22}^{(2)} = 0,$$
$$a_{15}^{(3)} = a_{15}^{(2)} - m_1^{(2)} a_{25}^{(2)} = 1,19746 - 0,07296 \cdot 1,20639 = 1,10944,$$
$$a_{16}^{(3)} = a_{16}^{(2)} - m_1^{(2)} a_{26}^{(2)} = 2,35238 - 0,07296 \cdot 2,42301 = 2,17560.$$

Записываем результаты в раздел IV.

14) Контроль:

$$a_{11}^{(3)} + a_{15}^{(3)} = 1,06616 + 1,10944 = 2,17560 = a_{16}^{(3)}.$$

15) Выписывая главные строки каждого раздела, получим систему, эквивалентную данной:

$$\left.\begin{aligned}
&1,06616x_1 = 1,10944,\\
&0,10492x_1 + 1,11170x_2 = 1,20639,\\
&0,15436x_1 + 0,16281x_2 + 1,17077x_3 = 1,41604,\\
&0,23680x_1 + 0,24710x_2 + 0,25680x_3 + 1,26710x_4 = 1,84710.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Обратный ход. Результаты вычислений при реализации обратного хода записываем в разделе V. Последовательно получаем

$$x_1 = 1,10944/1,06616 = 1,04059,$$
$$x_2 = (1,20639 - 0,10492 \cdot 1,04059)/1,11170 = 0,98697,$$
$$x_3 = (1,41604 - 0,15436 \cdot 1,04059 - 0,16281 \cdot 0,98697)/1,17077 = \\ = 0,93505,$$
$$x_4 = (1,84710 - 0,23680 \cdot 1,04059 - 0,24710 \cdot 0,98697 - 0,25680 \times \\ \times 0,93505)/1,26710 = 0,88130.$$

Контроль обратного хода осуществляется с помощью столбца Σ так же, как было указано выше на стр. 50.

ЗАДАЧИ

1. Следующие системы решить методом Гаусса с выбором главного элемента и обычным методом Гаусса, проведя все вычисления с пятью значащими цифрами. Сравнить полученные значения с указанными точными значениями.

$$\text{а)}\ A = \begin{pmatrix} 0,15 & 2,11 & 30,75 \\ 0,64 & 1,21 & 2,05 \\ 3,21 & 1,53 & 1,04 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -26,38 \\ 1,01 \\ 5,23 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

б) $A=\begin{pmatrix} 1{,}15 & 0{,}42 & 100{,}71 \\ 1{,}19 & 0{,}55 & 0{,}32 \\ 1{,}00 & 0{,}35 & 3{,}00 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} -198{,}70 \\ 2{,}29 \\ -0{,}65 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Решить следующую систему а) обычным методом Гаусса; б) методом Гаусса с выбором главного элемента:

$$x+592y=437,$$
$$592x+4308y=2251.$$

Все вычисления производить с точностью до четырех значащих цифр.

Для следующих систем найти методом Гаусса с выбором главного элемента значения неизвестных с указанным числом m значащих цифр.

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} -12 \\ 29 \\ 5 \end{pmatrix}$, $m=4$.

4. $A=\begin{pmatrix} 2{,}10 & -4{,}50 & -2{,}00 \\ 3{,}00 & 2{,}50 & 4{,}30 \\ -6{,}00 & 3{,}50 & 2{,}50 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 19{,}07 \\ 3{,}21 \\ -18{,}25 \end{pmatrix}$, $m=3$.

5. $A=\begin{pmatrix} 21{,}547 & -95{,}510 & -96{,}121 \\ 10{,}223 & -91{,}065 & -7{,}343 \\ 51{,}218 & 12{,}269 & 86{,}457 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} -49{,}930 \\ -12{,}465 \\ 60{,}812 \end{pmatrix}$, $m=4$.

6. $A=\begin{pmatrix} 3{,}24 & -2{,}18 & 5{,}09 & -2{,}37 & 1{,}21 \\ 0{,}73 & 3{,}85 & -6{,}23 & 4{,}80 & -5{,}93 \\ 2{,}88 & 5{,}73 & -7{,}02 & -9{,}17 & 3{,}58 \\ 2{,}10 & 3{,}02 & -0{,}78 & 3{,}85 & -6{,}00 \\ 1{,}20 & -4{,}13 & 6{,}48 & 0{,}00 & -3{,}24 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 28{,}38 \\ -36{,}00 \\ 24{,}48 \\ -16{,}23 \\ 4{,}34 \end{pmatrix}$,

$m=3$.

7. $A=\begin{pmatrix} 2{,}6 & -4{,}5 & -2{,}0 \\ 3{,}0 & 3{,}0 & 4{,}3 \\ -6{,}0 & 3{,}5 & 3{,}0 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 19{,}07 \\ 3{,}21 \\ -18{,}25 \end{pmatrix}$, $m=5$.

8. $A=\begin{pmatrix} 4{,}21 & 22{,}42+\alpha & 3{,}85 \\ 2{,}31 & 31{,}49 & 1{,}52 \\ 3{,}49 & 4{,}85 & 28{,}72+\alpha \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 30{,}24 \\ 40{,}95-\beta \\ 42{,}81 \end{pmatrix}$, $m=5$,

$\alpha=0{,}25\cdot k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ 4,\ \beta=0{,}35\cdot k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ 5.$

9. $A=\begin{pmatrix} 3{,}81 & 0{,}25 & 1{,}28 & 0{,}75+\alpha \\ 2{,}25 & 1{,}32 & 4{,}58+\alpha & 0{,}49 \\ 5{,}31 & 6{,}28+\alpha & 0{,}98 & 1{,}04 \\ 9{,}39+\alpha & 2{,}45 & 3{,}35 & 2{,}28 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 4{,}21 \\ 6{,}47+\beta \\ 2{,}38 \\ 10{,}48+\beta \end{pmatrix}$,

$m=5$,

$\alpha=0{,}5\cdot k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ 4,\ \beta=0{,}5\cdot k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ 5.$

§ 5. Схема Халецкого

Рассмотрим систему линейных уравнений, записанную в матричном виде:

$$Ax = b,$$

где $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) и

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

— векторы-столбцы.

Представим матрицу A в виде произведения $A = BC$, где

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда элементы b_{ij} и c_{ij} будут определяться по формулам

$$\left.\begin{aligned} &b_{i1} = a_{i1}, \\ &b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj} \quad (i \geqslant j > 1) \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ &c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) \quad (1 < i < j). \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

Отсюда искомый вектор x может быть вычислен из цепи уравнений

$$By = b, \quad Cx = y. \qquad (5.3)$$

Так как матрицы B и C треугольные, то системы (5.3) легко решаются, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &y_1 = a_{1,n+1}/b_{11}, \\ &y_i = \left(a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k \right) \Big/ b_{ii} \quad (i > 1) \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &x_n = y_n, \\ &x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik} x_k \quad (i < n). \end{aligned}\right\} \qquad (5.5)$$

Из формул (5.4) видно, что числа y_i выгодно вычислять вместе с коэффициентами c_{ij}. Эта схема вычислений называется *схемой Халецкого*. В схеме применяется обычный контроль с помощью сумм.

Схема Халецкого удобна для работы на клавишных вычислительных машинах, так как в этом случае операции «накопления» (5.1) и (5.2) можно проводить без записи промежуточных результатов.

Пример 5.1. Решить систему

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -12, \\ 2x_1 \quad + x_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Решение. Результаты вычислений записываем в табл. 5.1. Она состоит из двух частей:

1) левая половина, в которой дается схема записи результатов вычислений;

2) правая половина, в которой записываются результаты вычислений согласно указанной схеме.

Порядок заполнения таблицы.

1) В первый раздел табл. 5.1 вписываем матрицу коэффициентов системы, ее свободные члены и контрольные суммы.

2) Элементы столбца x_1 из раздела I переносим в столбец x_1 раздела II, так как $b_{i1} = a_{i1}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

3) Вычисляем элементы первой строки раздела II. Для этого делим все элементы первой строки раздела I на элемент $a_{11} = b_{11}$, в нашем случае на 3.

Имеем:

$$c_{12} = \frac{1}{3} = 0{,}333333, \quad c_{13} = -\frac{1}{3} = -0{,}333333, \quad c_{14} = \frac{2}{3} = 0{,}666667,$$

$$c_{15} = \frac{6}{3} = 2, \quad c_{16} = \frac{11}{3} = 3{,}666667.$$

4) Заполняем столбец x_2 раздела II, начиная со второй строки. Пользуясь формулами (5.1), определяем b_{j2}:

$$b_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12} = 1 - \left(-5 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} = 2{,}666667,$$

$$b_{32} = a_{32} - b_{31}c_{12} = 0 - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} = -0{,}666667,$$

$$b_{42} = a_{42} - b_{41}c_{12} = -5 - 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{16}{3} = -5{,}333333.$$

5) Заполняем вторую строку раздела II, определяя c_{2j} для $j = 3, 4, 5, 6$ по формулам (5.2):

$$c_{23} = \frac{1}{b_{22}}(a_{23} - b_{21}c_{13}) = \frac{3}{8}\left(3 - 5 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

$$c_{24} = \frac{1}{b_{22}}(a_{24} - b_{21}c_{14}) = \frac{3}{8}\left(-4 - (-5) \cdot \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{4} = -0{,}25,$$

$$c_{25} = \frac{1}{b_{22}}(a_{25} - b_{21}c_{15}) = \frac{3}{8}(-12 - (-5) \cdot 2) = -\frac{3}{4} = -0{,}75,$$

$$c_{26} = \frac{1}{b_{22}}(a_{26} - b_{21}c_{16}) = \frac{3}{8}\left(-17 - (-5) \cdot \frac{11}{3}\right) = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Таблица 5.1

Схема Халецкого

	x_1	x_2	x_3	x_4		Σ	x_1	x_2	x_3	x_4		Σ
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	3	1	—1	2	6	11
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	—5	1	3	—4	—12	—17
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	2	0	1	—1	1	3
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	1	—5	3	—3	3	—1
II	b_{11} 1	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	3	1 0,333333	—0,333333	0,666667	2	3,666667
	b_{21}	b_{22} 1	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}	—5	2,666667 1	0,5	—0,25	—0,75	0,5
	b_{31}	b_{32}	b_{33} 1	c_{34}	c_{35}	c_{36}	2	—0,666667	2 1	—1,25	—1,75	—2
	b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44} 1	c_{45}	c_{46}	1	—5,333333	6	2,5 1	3	4
III					y_1	x_1					2	1
					y_2	x_2					—0,75	—1
					y_3	x_3					—1,75	2
					y_4	x_4					3	3

6) Заполняем столбец x_3, вычисляя его элементы b_{33} и b_{43} по формулам (5.1).

7) Аналогично продолжаем процесс до тех пор, пока не будет заполнен раздел II.

Таким образом, заполнение раздела II происходит способом «елочки»: столбец — строка, столбец — строка и т. д.

8) Определяем y_i и x_i ($i=1, 2, 3, 4$) по формулам (5.4) и (5.5) и записываем в раздел III:

$$y_1 = a_{15}/b_{11} = 6/3 = 2,$$

$$y_2 = (a_{25} - b_{21}y_1)/b_{22} = (-12 + 5 \cdot 2)/2{,}666667 = -0{,}75,$$
$$y_3 = (a_{35} - b_{31}y_1 - b_{32}y_2)/b_{33} = (1 - 2 \cdot 2 - 0{,}666667 \cdot 0{,}75)/2 = -1{,}75,$$
$$y_4 = (a_{45} - b_{41}y_1 - b_{42}y_2 - b_{43}y_3)/b_{44} = \\ = (3 - 2 - 5{,}333333 \cdot 0{,}75 + 6 \cdot 1{,}75) = 3,$$

$$x_4 = y_4 = 3,$$
$$x_3 = y_3 - c_{34}x_4 = -1{,}75 + 1{,}25 \cdot 3 = 2,$$
$$x_2 = y_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 = -0{,}75 - 0{,}5 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 3 = -1,$$
$$x_1 = y_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - c_{14}x_4 = \\ = 2 + 0{,}333333 + 0{,}333333 \cdot 2 - 0{,}666667 \cdot 3 = 1.$$

9) Текущий контроль осуществляем с помощью столбца Σ, над которым производим те же действия, что и над столбцом свободных членов.

ЗАДАЧИ

Решить системы, пользуясь схемой Халецкого.

1. $A = \begin{pmatrix} 2{,}5 & -3{,}0 & 4{,}6 \\ -3{,}5 & 2{,}6 & 1{,}5 \\ -6{,}5 & -3{,}5 & 7{,}3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1{,}05 \\ -14{,}46 \\ -17{,}735 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 2{,}0 & -4{,}0 & -3{,}25 & 1{,}0 \\ 3{,}0 & -3{,}0 & -4{,}3 & 8{,}0 \\ 1{,}0 & -5{,}0 & 3{,}3 & -20{,}0 \\ 2{,}5 & -4{,}0 & 2{,}0 & -3{,}0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4{,}84 \\ 8{,}89 \\ -14{,}01 \\ -20{,}29 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 4 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}.$

§ 6. Метод квадратных корней

Метод квадратных корней (см. [2], [12], [26], [54]) используется для решения линейной системы

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \tag{6.1}$$

у которой матрица A симметрическая, т. е.

$$a_{ij}=a_{ji} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Он является более экономным и удобным по сравнению с методами решения систем общего вида, рассмотренными ранее.

Решение системы осуществляется в два этапа.

Прямой ход. Представим матрицу A в виде произведения двух взаимно транспонированных треугольных матриц:

$$A=T'T, \tag{6.2}$$

где

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}, \qquad T'=\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{1n} & t_{2n} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы T' и T и приравнивая матрице A, получим следующие формулы для определения t_{ij}:

$$\left.\begin{aligned} & t_{11}=\sqrt{a_{11}},\quad t_{1j}=\frac{a_{1j}}{t_{11}} \quad (j>1), \\ & t_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \quad (1<i\leqslant n), \\ & t_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}t_{kj}}{t_{ii}} \quad (i<j), \\ & t_{ij}=0 \quad \text{при } i>j. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

После того, как матрица T найдена, систему (6.1) заменяем двумя эквивалентными ей системами с треугольными матрицами

$$T'\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}, \qquad T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}. \tag{6.4}$$

Обратный ход. Записываем в развернутом виде системы (6.4):

$$\left.\begin{aligned} & t_{11}y_1=b_1, \\ & t_{12}y_1+t_{22}y_2=b_2, \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & t_{1n}y_1+t_{2n}y_2+\ldots+t_{nn}y_n=b_n, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

$$\left.\begin{aligned} t_{11}x_1+t_{12}x_2+\ldots+t_{1n}x_n&=y_1, \\ t_{22}x_2+\ldots+t_{2n}x_n&=y_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_{nn}x_n&=y_n. \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

Отсюда последовательно находим

$$y_1=\frac{b_1}{t_{11}},\quad y_i=\frac{b_i-\sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}y_k}{t_{ii}}\quad (i>1), \tag{6.7}$$

$$x_n=\frac{y_n}{t_{nn}},\quad x_i=\frac{y_i-\sum\limits_{k=i+1}^{n} t_{ik}x_k}{t_{ii}}\quad (i<n). \tag{6.8}$$

При вычислениях применяется обычный контроль с помощью сумм, причем при составлении суммы учитываются все коэффициенты соответствующей строки (см. пример 6.1).

Заметим, что при действительных a_{ij} могут получиться чисто мнимые t_{ij}. Метод применим и в этом случае (см. пример 6.2).

Метод квадратных корней дает большой выигрыш во времени по сравнению с рассмотренными ранее методами, так как, во-первых, существенно уменьшает число умножений и делений (почти в два раза для больших n, см. [2]), во-вторых, позволяет накапливать сумму произведений без записи промежуточных результатов.

Пример 6.1. Методом квадратных корней решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
1{,}00x_1+0{,}42x_2+0{,}54x_3+0{,}66x_4&=0{,}3,\\
0{,}42x_1+1{,}00x_2+0{,}32x_3+0{,}44x_4&=0{,}5,\\
0{,}54x_1+0{,}32x_2+1{,}00x_3+0{,}22x_4&=0{,}7,\\
0{,}66x_1+0{,}44x_2+0{,}22x_3+1{,}00x_4&=0{,}9.
\end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Решение. Прямой ход.

1) В первый раздел табл. 6.1 записываем коэффициенты системы.

2) Суммируем коэффициенты по каждой строке и результаты записываем в последнем столбце в качестве элементов S_1, S_2, S_3, S_4.

3) Находим t_{ij}. Для этого с помощью общих формул (6.3) напишем формулы для вычислений t_{ij} при $n=4$:

$$\left.\begin{aligned}
&t_{11}=\sqrt{a_{11}},\quad t_{12}=\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}},\quad t_{13}=\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}},\quad t_{14}=\frac{a_{14}}{\sqrt{a_{11}}},\\
&t_{22}=\sqrt{a_{22}-t_{12}^2},\quad t_{23}=\frac{a_{23}-t_{12}t_{13}}{t_{22}},\quad t_{24}=\frac{a_{24}-t_{12}t_{14}}{t_{22}},\\
&t_{33}=\sqrt{a_{33}-t_{13}^2-t_{23}^2},\quad t_{34}=\frac{a_{34}-t_{13}t_{14}-t_{23}t_{24}}{t_{33}},\\
&t_{44}=\sqrt{a_{44}-t_{14}^2-t_{24}^2-t_{34}^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

На основании этих формул последовательно получаем

$$t_{11}=1{,}00,\ t_{12}=0{,}42,\ t_{13}=0{,}54,\ t_{14}=0{,}66,$$

$$t_{22}=\sqrt{1{,}00-0{,}42^2}=\sqrt{1{,}42\cdot 0{,}58}=0{,}90752,$$

$$t_{23}=\frac{0{,}32-0{,}42\cdot 0{,}54}{0{,}90752}=0{,}10270,\quad t_{24}=\frac{0{,}44-0{,}42\cdot 0{,}66}{0{,}90752}=0{,}17939$$

и т. д.

Результаты записываем в разделе II согласно схеме, указанной в левой части табл. 6.1.

4) Вычисляем элементы σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 по формулам, аналогичным формулам (6.10):

$$\sigma_1=\frac{S_1}{t_{11}}=\frac{2,92}{1,00}=2,92,\quad \sigma_2=\frac{S_2-a_{12}\sigma_1}{t_{22}}=\frac{2,68-0,42\cdot 2,92}{0,90752}=1,60173,$$

$$\sigma_3=\frac{S_3-a_{13}\sigma_1-a_{23}\sigma_2}{t_{33}}=\frac{2,78-0,54\cdot 2,92-0,32\cdot 1,60173}{0,83537}=1,24340,$$

$$\sigma_4=\frac{S_4-a_{14}\sigma_1-a_{24}\sigma_2-a_{34}\sigma_3}{t_{44}}=1,75157.$$

Обратный ход.

5) Находим y_i $(i=1, 2, 3, 4)$. По формулам (6.7) последовательно будем иметь

$$y_1=\frac{b_1}{t_{11}}=\frac{0,3}{1,00}=0,30,\quad y_2=\frac{b_2-t_{12}y_1}{t_{22}}=\frac{0,5-0,42\cdot 0,3}{0,90752}=0,41211,$$

$$y_3=\frac{b_3-t_{13}y_1-t_{23}y_2}{t_{33}}=\frac{0,7-0,54\cdot 0,3-0,10270\cdot 0,41211}{0,83537}=0,59336,$$

$$y_4=\frac{b_4-t_{14}y_1-t_{24}y_2-t_{34}y_3}{t_{44}}=1,04597.$$

Значения y_i записываем в разделе II.

6) Контроль: сумма элементов по строке в первых пяти столбцах должна равняться соответствующему элементу последнего столбца. Находим эти суммы:

$$\begin{aligned} t_{11}+t_{12}+t_{13}+t_{14}+y_1&=2,92,\\ t_{22}+t_{23}+t_{24}+y_2&=1,60173,\\ t_{33}+t_{34}+y_3&=1,24340,\\ t_{44}+y_4&=1,75157.\end{aligned}$$

Таким образом, результаты совпадают со значениями элементов последнего столбца. Можно переходить к следующему этапу.

7) Находим x_i $(i=1, 2, 3, 4)$. На основании формул (6.8) получаем при $n=4$

$$\left.\begin{aligned} x_4&=\frac{y_4}{t_{44}}=\frac{1,04597}{0,70560}=1,48238,\\ x_3&=\frac{y_3-t_{34}x_4}{t_{33}}=1,03917,\\ x_2&=\frac{y_2-t_{23}x_3-t_{24}x_4}{t_{22}}=0,04348,\\ x_1&=\frac{y_1-t_{12}x_2-t_{13}x_3-t_{14}x_4}{t_{11}}=-1,25778.\end{aligned}\right\}\qquad(6.11)$$

Результаты записываем в разделе III.

8) Контроль: числа $\bar{x}_i$ находим по формулам (6.11), заменив элементы y_i на σ_i $(i=1, 2, 3, 4)$. Если все вычисления проведены верно, должно быть

$$\bar{x}_i=x_i+1.$$

Сравнение показывает, что величины $\bar{x}_i$ и x_i+1 совпадают при $i=3, 4$, а при $i=1, 2$ отличаются лишь на единицу пятого разряда, что вполне допустимо.

Пример 6.2. Методом квадратных корней решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2-2x_3 \qquad\quad -2x_5&=0{,}5,\\ 3x_1+4x_2-5x_3+\ x_4-3x_5&=5{,}4,\\ -2x_1-5x_2+3x_3-2x_4+2x_5&=5{,}0,\\ x_2-2x_3+5x_4+3x_5&=7{,}5,\\ -2x_1-3x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=3{,}3. \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

Решение. Записываем коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_i данной системы в раздел I табл. 6.2 и заполняем последний столбец. Применяя формулы (6.3) и (6.7) последовательно, переходя от строки к строке, вычисляем коэффициенты t_{ij} и новые свободные члены y_i и, таким образом, заполняем раздел II таблицы.

При этом некоторые значения t_{ij} оказываются чисто мнимыми, например:

$$t_{22}=\sqrt{a_{22}-t_{12}^2}=\sqrt{4-3^2}=i\sqrt{5}=2{,}2361i,$$
$$t_{23}=\frac{a_{23}-t_{12}t_{13}}{t_{22}}=\frac{-5-3\,(-2)}{2{,}2361i}=-0{,}4472i.$$

Для контроля заполняем последний столбец. На основании формул (6.8) находим значения неизвестных x_i, например:

$$x_3=\frac{y_3-t_{35}x_5-t_{34}x_4}{t_{33}}=$$
$$=\frac{-7{,}5803i-1{,}5652i\cdot 0{,}1998-2{,}0125i\cdot(-0{,}8996)}{0{,}8944i}=-6{,}8011.$$

Контрольные числа $\bar{x}_i$ получаем из системы (6.6) заменой y_i на σ_i. Величины x_i и $\bar{x}_i$ помещаем в раздел III. Если вычисления проведены верно, то значения $\bar{x}_i$ и x_i+1 могут отличаться лишь в последнем знаке. Сравнение показывает, что это условие выполнено.

ЗАДАЧИ

Методом квадратных корней решить системы уравнений. Вычисления вести с пятью знаками после запятой.

1. $A=\begin{pmatrix}3{,}1 & 1{,}5 & 1{,}0\\ 1{,}5 & 2{,}5 & 0{,}5\\ 1{,}0 & 0{,}5 & 4{,}2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}10{,}83\\ 9{,}20\\ 17{,}10\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}3{,}2 & 1 & 1\\ 1 & 3{,}7 & 1\\ 1 & 1 & 4{,}2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}4\\ 4{,}5\\ 5\end{pmatrix}.$

Таблица 6.1

Метод квадратных корней для системы (6.9)

I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	S_1	1,00	0,42	0,54	0,66	0,30	2,92
		a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	S_2	0,42	1,00	0,32	0,44	0,50	2,68
			a_{33}	a_{34}	b_3	S_3	0,54	0,32	1,00	0,22	0,70	2,78
				a_{44}	b_4	S_4	0,66	0,44	0,22	1,00	0,90	3,22
II	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	y_1	σ_1	1,00	0,42	0,54	0,66	0,30	2,92
		t_{22}	t_{23}	t_{24}	y_2	σ_2		0,90752	0,10270	0,17939	0,41211	1,60173
			t_{33}	t_{34}	y_3	σ_3			0,83537	—0,18533	0,59336	1,24340
				t_{44}	y_4	σ_4				0,70560	1,04597	1,75157
III	x_1	x_2	x_3	x_4			—1,25778	0,04348	1,03917	1,48238		
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$			—0,25779	1,04349	2,03917	2,48238		

Таблица 6.2

Метод квадратных корней для системы (6.12)

I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	b_1	S_1	1	3	—2	0	—2	0,5	0,5
		a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	b_2	S_2	3	4	—5	1	—3	5,4	5,4
			a_{33}	a_{34}	a_{35}	b_3	S_3	—2	—5	3	—2	2	5,0	1,0
				a_{44}	a_{45}	b_4	S_4	0	1	—2	5	3	7,5	14,5
					a_{55}	b_5	S_5	—2	—3	2	3	4	3,3	7,3
II	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	y_1	σ_1	1	3	—2	0	—2	0,5	0,5
		t_{22}	t_{23}	t_{24}	t_{25}	y_2	σ_2		$2,2361i$	$-0,4472i$	$-0,4472i$	$-1,3416i$	$-1,7471i$	$-1,7471i$
			t_{33}	t_{34}	t_{35}	y_3	σ_3			$0,8944i$	$2,0125i$	$1,5653i$	$-7,5803i$	$-3,1081i$
				t_{44}	t_{45}	y_4	σ_4				3,0414	2,2194	—2,2928	2,9679
					t_{55}	y_5	σ_5					$0,8221i$	$0,1643i$	$0,9859i$
III	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			—6,0978	—2,2016	—6,8011	—0,8996	0,1998		
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$			—5,0973	—1,2017	—5,8004	0,1007	1,1998		

3. $A=\begin{pmatrix} 2,12 & 0,42 & 1,34 & 0,88 \\ 0,42 & 3,95 & 1,87 & 0,43 \\ 1,34 & 1,87 & 2,98 & 0,46 \\ 0,88 & 0,43 & 0,46 & 4,44 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 11,172 \\ 0,115 \\ 9,009 \\ 9,349 \end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix} 5,5 & 7 & 6 & 5,5 \\ 7 & 10,5 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10,5 & 9 \\ 5,5 & 7 & 9 & 10,5 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix} 5,18+\alpha & 1,12 & 0,95 & 1,32 & 0,83 \\ 1,12 & 4,28-\alpha & 2,12 & 0,57 & 0,91 \\ 0,95 & 2,12 & 6,13+\alpha & 1,29 & 1,57 \\ 1,32 & 0,57 & 1,29 & 4,57-\alpha & 1,25 \\ 0,83 & 0,91 & 1,57 & 1,25 & 5,21+\alpha \end{pmatrix},$

$$b=\begin{pmatrix} 6,19+\beta \\ 3,21 \\ 4,28-\beta \\ 6,25 \\ 4,95+\beta \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha=0,25\cdot k, & k=0,1,\ldots,4, \\ \beta=0,35\cdot k, & k=0,\ 1,2,\ldots,\ 5. \end{matrix}$$

§ 7. Вычисление определителей

1. Применение метода Гаусса. Доказано (см. [2], [12], [54]), что определитель матрицы A равен произведению «ведущих» (или главных) элементов в соответствующей схеме Гаусса, т. е.

$$\Delta=\det A=a_{11}a_{22}^{(1)}\ \ldots\ a_{nn}^{(n-1)}. \tag{7.1}$$

Таким образом, для вычисления определителя $\det A$ нужно выполнить вычисления, необходимые для осуществления прямого хода в методе Гаусса для системы

$$A\boldsymbol{x}=0,$$

и затем найти произведение «ведущих» элементов. Вычислительная схема в этом случае такая же, как и для решения системы линейных уравнений, только без столбца свободных членов. Контрольные соотношения также остаются прежними.

Пример 7.1. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2,0 & 1,0 & -0,1 & 1,0 \\ 0,4 & 0,5 & 4,0 & -8,5 \\ 0,3 & -1,0 & 1,0 & 5,2 \\ 1,0 & 0,2 & 2,5 & -1,0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Данный определитель совпадает с определителем системы, рассмотренной в примере 3.1. Используя приведенную там схему, находим произведение «ведущих» элементов и получаем искомое значение определителя

$$\Delta=2,0\cdot 0,30\cdot 16,425\cdot(-1,72298)=-16,99997.$$

Пример 7.2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1,1161 & 0,1254 & 0,1397 & 0,1490 \\ 0,1582 & 1,1675 & 0,1768 & 0,1871 \\ 0,1968 & 0,2071 & 1,2168 & 0,2271 \\ 0,2368 & 0,2471 & 0,2568 & 1,2671 \end{vmatrix}.$$

Решение. Данный определитель равен определителю системы, решенной в примере 4.1 методом Гаусса с выбором главного элемента. Составляя произведение выделенных там «ведущих» элементов, получаем искомое значение определителя $\Delta = a_{44} \cdot a_{33}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot a_{11}^{(3)} = 1,26710 \cdot 1,17077 \cdot 1,11170 \cdot 1,06616 = 1,75829$.

Пример 7.3. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2,8 & 2,1 & -1,3 & 0,3 \\ -1,4 & 4,5 & -7,7 & 1,3 \\ 0,6 & 2,1 & -5,8 & 2,4 \\ 3,5 & -6,5 & 3,2 & -7,9 \end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся компактной схемой Гаусса. Запишем элементы определителя в раздел I табл. 7.1 и выполним все вычисления, необходимые для составления компактной схемы Гаусса.

Таблица 7.1

Вычисление определителя по методу Гаусса

	a_{i_1}	a_{i_2}	a_{i_3}	a_{i_4}	$\sum$
I	2,8	2,1	−1,3	0,3	3,9
	−1,4	4,5	−7,7	1,3	−3,3
	0,6	2,1	−5,8	2,4	−0,7
	3,5	−6,5	3,2	−7,9	−7,7
	1	0,7500	−0,4643	0,1071	1,3928
II		5,5500	−8,3500	1,4499	−1,3501
		1,6500	−5,5214	2,3357	−1,5357
		−9,1250	4,8250	−8,2748	−12,5748
		1	−1,5045	0,2612	−0,2433
III			−3,0390	1,9047	−1,1343
			−8,9036	−5,8913	−14,7949
			1	−0,6268	0,3732
IV				−11,4721	−10,4721

Результаты этих вычислений даны в разделах II, III, IV табл. 7.1, при этом подчеркнуты «ведущие» элементы. Столбец $\sum$ используется для контроля вычислений так же, как при решении систем.

Перемножая «ведущие» элементы каждого раздела, получаем

$$\Delta = 2{,}8 \cdot 5{,}5500 \cdot (-3{,}0390) \cdot (-11{,}4721) = 541{,}78.$$

2. Применение метода квадратных корней. Если матрица A симметрическая, то для вычисления определителя этой матрицы целесообразно использовать метод квадратных корней.

Представим матрицу A в виде произведения двух взаимно транспонированных треугольных матриц:

$$A = T'T,$$

где

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix};$$

тогда

$$\det A = \det T' \det T = (\det T)^2 = (t_{11} t_{22} \dots t_{nn})^2. \tag{7.2}$$

Числа t_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) находим по формулам (6.3).

Пример 7.4. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{vmatrix}.$$

Решение. В примере 6.1 была рассмотрена система с матрицей, определитель которой совпадает с данным. Эта система решена там методом квадратных корней, при этом была составлена соответствующая треугольная матрица T. Взяв диагональные элементы этой матрицы t_{ii} ($i = 1, 2, 3, 4$), по формуле (7.2) находим (см. табл. 6.1)

$$\Delta = (1{,}00 \cdot 0{,}90752 \cdot 0{,}83537 \cdot 0{,}70560)^2 = (0{,}53492)^2 = 0{,}28614.$$

ЗАДАЧИ

Используя метод Гаусса или метод квадратных корней, вычислить определители.

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 8{,}64-\alpha & 1{,}71 & 5{,}42 \\ -6{,}39 & 4{,}25 & 1{,}84+\alpha \\ 4{,}21 & 7{,}92-\alpha & -3{,}41 \end{vmatrix}, \quad \alpha = 0{,}5 \cdot n,$

$n = 0, 1, 2, \dots, 10.$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 3{,}81 & 0{,}25 & 1{,}28 & 0{,}75+\alpha \\ 2{,}25 & 1{,}32 & 4{,}58+\alpha & 0{,}49 \\ 5{,}31 & 6{,}28+\alpha & 0{,}98 & 1{,}04 \\ 9{,}39+\alpha & 2{,}45 & 3{,}35 & 2{,}28 \end{vmatrix}, \qquad \alpha = 0{,}5\cdot n,$

$n = 0, 1, 2, \ldots, 10.$

3. $\Delta = \begin{vmatrix} 5{,}18+\alpha & 1{,}12 & 0{,}95 & 1{,}32 & 0{,}83 \\ 1{,}12 & 4{,}28-\alpha & 2{,}12 & 0{,}57 & 0{,}91 \\ 0{,}95 & 2{,}12 & 6{,}13+\alpha & 1{,}29 & 1{,}57 \\ 1{,}32 & 0{,}57 & 1{,}29 & 4{,}57-\alpha & 1{,}25 \\ 0{,}83 & 0{,}91 & 1{,}57 & 1{,}25 & 5{,}21+\alpha \end{vmatrix},$

$\alpha = 0{,}25\cdot k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 10.$

§ 8. Вычисление элементов обратной матрицы методом Гаусса

Обратной к матрице A называют такую матрицу A^{-1}, для которой

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *неособенной* или *невырожденной*, если определитель ее $\det A$ отличен от нуля. Всякая неособенная матрица имеет обратную матрицу.

Пусть дана неособенная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления элементов ее обратной матрицы

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

используем соотношение

$$AA^{-1} = E.$$

Умножая матрицу A на A^{-1} и приравнивая каждый элемент произведения соответствующему элементу матрицы E, получим систему из n^2 уравнений с n^2 неизвестными x_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Так, умножая почленно каждую строку матрицы A на первый столбец матрицы A^{-1} и каждый раз приравнивая полученное произведение соответствующему элементу первого столбца матрицы E, получаем систему

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+a_{13}x_{31}+\ldots+a_{1n}x_{n1}=1, \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+a_{23}x_{31}+\ldots+a_{2n}x_{n1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_{11}+a_{n2}x_{21}+a_{n3}x_{31}+\ldots+a_{nn}x_{n1}=0. \end{array}\right\} \qquad (8.1)$$

Аналогично при почленном умножении строк матрицы A на второй столбец матрицы A^{-1} образуется еще одна система

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+a_{13}x_{32}+\ldots+a_{1n}x_{n2}=0, \\ a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{32}+\ldots+a_{2n}x_{n2}=1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_{12}+a_{n2}x_{22}+a_{n3}x_{32}+\ldots+a_{nn}x_{n2}=0, \end{array}\right\} \qquad (8.2)$$

и т. д.

Таким образом, система из n^2 уравнений с n^2 неизвестными распадается на n систем уравнений с n неизвестными. Все эти системы имеют одну и ту же матрицу A и отличаются только свободными членами. Так как при решении системы по методу Гаусса основные вычисления приходится производить над матрицей коэффициентов, решение всех этих систем можно объединить в одной схеме, рассматривая одновременно n столбцов свободных членов.

Все результаты вычислений можно расположить в одной таблице. В табл. 8.1 показана схема вычислений для матрицы четвертого порядка.

Замечание. При вычислении обратной матрицы можно использовать также метод Гаусса с выбором главного элемента.

Пример 8.1. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1,8 & -3,8 & 0,7 & -3,7 \\ 0,7 & 2,1 & -2,6 & -2,8 \\ 7,3 & 8,1 & 1,7 & -4,9 \\ 1,9 & -4,3 & -4,9 & -4,7 \end{pmatrix}. \qquad (8.3)$$

Решение. Вычисления приведены в табл. 8.2. Последний столбец таблицы содержит суммы элементов по каждой строке и служит для контроля вычислений.

Заметим, что элементы строк обратной матрицы получаются в обратном порядке.

Таким образом, искомая обратная матрица имеет вид

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -0,21121 & -0,46003 & 0,16248 & 0,26956 \\ -0,03533 & 0,16873 & 0,01573 & -0,08920 \\ 0,23030 & 0,04607 & -0,00944 & -0,19885 \\ -0,29316 & -0,38837 & 0,06128 & 0,18513 \end{pmatrix}.$$

Таблица 8.1

Вычисление обратной матрицы методом Гаусса

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$a_{i5,\,\mathrm{I}}$	$a_{i5,\,\mathrm{II}}$	$a_{i5,\,\mathrm{III}}$	$a_{i5,\,\mathrm{IV}}$
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	1	0	0	0
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	0	1	0	0
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	0	0	1	0
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0	0	0	1
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	0	0	0
	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25,\,\mathrm{I}}^{(1)}$	1	0	0
	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35,\,\mathrm{I}}^{(1)}$	0	1	0
	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45,\,\mathrm{I}}^{(1)}$	0	0	1
	1	b_{23}	b_{24}	$b_{25,\,\mathrm{I}}$	$b_{25,\,\mathrm{II}}$	0	0
		$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35,\,\mathrm{I}}^{(2)}$	$a_{35,\,\mathrm{II}}^{(2)}$	1	0
		$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45,\,\mathrm{I}}^{(2)}$	$a_{45,\,\mathrm{II}}^{(2)}$	0	1
		1	b_{34}	$b_{35,\,\mathrm{I}}$	$b_{35,\,\mathrm{II}}$	$b_{35,\,\mathrm{III}}$	0
			$a_{44}^{(3)}$	$a_{45,\,\mathrm{I}}^{(3)}$	$a_{45,\,\mathrm{II}}^{(3)}$	$a_{45,\,\mathrm{III}}^{(3)}$	1
			1	$b_{45,\,\mathrm{I}}$	$b_{45,\,\mathrm{II}}$	$b_{45,\,\mathrm{III}}$	$b_{45,\,\mathrm{IV}}$
				x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}
				x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
				x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
				x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}

Для проверки составим произведение

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 0,99997 & 0,00000 & -0,00001 & 0,00000 \\ -0,00025 & 0,99997 & -0,00002 & -0,00039 \\ -0,00808 & -0,01017 & 0,99982 & 0,00009 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 1,00048 \end{pmatrix}.$$

Элементы обратной матрицы получены с некоторой погрешностью, которая появилась в результате того, что в процессе вычислений производились округления.

Ниже будет указан метод исправления элементов приближенной обратной матрицы (см. § 11).

Таблица 8.2

Вычисление обратной матрицы для матрицы (8.3)

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}, I	a_{i5}, II	a_{i5}, III	a_{i5}, IV	$\sum$
1,8	—3,8	0,7	—3,7	1	0	0	0	—4,0
0,7	2,1	—2,6	—2,8	0	1	0	0	—1,6
7,3	8,1	1,7	—4,9	0	0	1	0	13,2
1,9	—4,3	—4,9	—4,7	0	0	0	1	—11,0
1	—2,11111	0,38889	—2,05556	0,55556	0	0	0	—2,22223
	3,57778	—2,87222	—1,36111	—0,38885	1	0	0	—0,04440
	23,51110	—1,13890	10,10559	—4,05551	0	1	0	29,42228
	—0,28889	—5,63889	—0,79444	—1,05554	0	0	1	—6,77776
	1	—0,80279	—0,38043	—0,10868	0,27950	0	0	—0,01241
		17,73577	19,04992	—1,50032	—6,57135	1	0	29,71405
		—5,87081	—0,90434	—1,08694	0,08074	0	1	—6,78134
		1	1,07411	—0,08459	—0,37108	0,05638	0	1,67539
			5,40155	—1,58355	—2,09780	0,33100	1	3,05456
			1	—0,29316	—0,38837	0,06128	0,18513	0,56540
				0,23030	0,04607	—0,00944	—0,19885	1,06809
				—0,03533	0,16873	0,01573	—0,08920	1,06013
				—0,21121	—0,46003	0,16284	0,26956	0,76266

ЗАДАЧИ

Используя метод Гаусса, найти матрицу, обратную заданной.

1. $\begin{pmatrix} 8,301 & 2,625 & 4,100 & 1,903 \\ 3,926 & 8,458 & 7,787 & 2,460 \\ 3,773 & 7,211 & 8,041 & 2,280 \\ 2,211 & 3,657 & 1,697 & 6,993 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 8,644 & 1,715 & 5,422 & 1,433 \\ 2,966 & 6,391 & 1,377 & 1,616 \\ 2,908 & 6,266 & 15,070 & 1,587 \\ 2,522 & 1,535 & 1,331 & 6,188 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1,1161 & 0,1254 & 0,1397 & 0,1490 \\ 0,1582 & 1,1675 & 0,1768 & 0,1871 \\ 0,1968 & 0,2071 & 1,2168 & 0,2271 \\ 0,2368 & 0,2471 & 0,2568 & 1,2671 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 3,81 & 0,25 & 1,28 & 0,75+\alpha \\ 2,25 & 1,32 & 4,58+\alpha & 0,49 \\ 5,31 & 6,28+\alpha & 0,98 & 1,04 \\ 9,39+\alpha & 2,45 & 3,35 & 2,28 \end{pmatrix},$

$\alpha=0,5\cdot n, \quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ 4.$

5. $\begin{pmatrix} 24,21+\alpha & 2,42 & 3,85 \\ 2,31 & 31,49 & 1,52 \\ 3,49 & 4,85 & 28,72+\alpha \end{pmatrix},$

$\alpha=0,2\cdot n, \quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ 4.$

§ 9. Метод простой итерации

Пусть система линейных уравнений

$$Ax=b \tag{9.1}$$

каким-либо образом приведена к виду

$$x=Cx+f, \tag{9.2}$$

где C — некоторая матрица, а f — вектор-столбец.

Исходя из произвольного вектора $x^{(0)}$,

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix},$$

строим итерационный процесс

$$x^{(k+1)}=Cx^{(k)}+f \qquad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

или в развернутой форме

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} &= c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{aligned}\right\} \quad (9.3)$$

Производя итерации, получим последовательность векторов $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}, \ldots$

Доказано (см. [2], [12], [26], [54], [56]), что если элементы матрицы C удовлетворяют одному из условий

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \leqslant \alpha < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.4}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| \leqslant \beta < 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{9.5}$$

то процесс итерации сходится к точному решению системы $\boldsymbol{x}$ при любом начальном векторе $\boldsymbol{x}^{(0)}$, т. е.

$$\boldsymbol{x} = \lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{(k)}.$$

Таким образом, точное решение системы получается лишь в результате бесконечного процесса и всякий вектор $\boldsymbol{x}^{(k)}$ из полученной последовательности является приближенным решением. Оценка погрешности этого приближенного решения $\boldsymbol{x}^{(k)}$ дается одной из следующих формул:

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_{j=1, 2, \ldots, n} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|, \tag{9.4'}$$

если выполнено условие (9.4), или

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leqslant \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|, \tag{9.5'}$$

если выполнено условие (9.5). Эти оценки можно еще усилить соответственно так:

$$\max |x_i - x_i^{(k)}| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \max |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \tag{9.4''}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i^{(k)}| \leqslant \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|. \tag{9.5''}$$

Процесс итераций заканчивают, когда указанные оценки свидетельствуют о достижении заданной точности.

Начальный вектор $x^{(0)}$ может быть выбран, вообще говоря, произвольно. Иногда берут $x^{(0)}=f$. Однако наиболее целесообразно в качестве компонент вектора $x^{(0)}$ взять приближенные значения неизвестных, полученные грубой прикидкой.

Приведение системы (9.1) к виду (9.2) можно осуществить различными способами (см. [12], [54]). Важно только, чтобы выполнялось одно из условий (9.4) или (9.5). Ограничимся рассмотрением двух таких способов.

Первый способ. Если диагональные элементы матрицы A отличны от нуля, т. е.

$$a_{ii} \neq 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

то систему (9.1) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n), \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{n,\,n-1}x_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

В этом случае элементы матрицы C определяются следующим образом:

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \qquad (i \neq j), \quad c_{ii}=0,$$

и тогда условия (9.4) и (9.5) соответственно приобретают вид

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leqslant \alpha < 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{9.7}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leqslant \beta < 1 \qquad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{9.8}$$

Неравенства (9.7), (9.8) будут выполнены, если диагональные элементы матрицы A удовлетворяют условию

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{9.9}$$

т. е. если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

Второй способ показан на примере 9.2 и пояснений не требует.

Вообще говоря, для любой системы с невырожденной матрицей существуют сходящиеся итерационные методы решения, но далеко не всегда они удобны для практических вычислений.

Если метод итераций сходится, он дает следующие преимущества по сравнению с методами, рассмотренными выше.

1) Если итерации сходятся достаточно быстро, т. е. если для решения системы требуется менее n итераций, то получаем выигрыш во времени, так как число арифметических действий, необходимых для одной итерации, пропорционально n^2, а общее число арифметических действий в методе Гаусса, например, пропорционально n^3.

2) Погрешности округления в методе итераций сказываются значительно меньше, чем в методе Гаусса. Кроме того, метод итераций является *самоисправляющимся*, т. е. отдельная ошибка, допущенная в вычислениях, не отражается на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новый начальный вектор.

Последнее обстоятельство часто используется для уточнения значений неизвестных, полученных методом Гаусса (см. пример 10.2).

3) Метод итераций становится особенно выгодным при решении систем, у которых значительное число коэффициентов равно нулю. Такие системы появляются, например, при решении уравнений в частных производных.

4) Процесс итераций приводит к выполнению однообразных операций и сравнительно легко программируется на ЭВМ.

Пример 9.1. Методом простой итерации решить систему

$$\left.\begin{aligned}
20{,}9x_1+1{,}2x_2+2{,}1x_3+0{,}9x_4&=21{,}70,\\
1{,}2x_1+21{,}2x_2+1{,}5x_3+2{,}5x_4&=27{,}46,\\
2{,}1x_1+1{,}5x_2+19{,}8x_3+1{,}3x_4&=28{,}76,\\
0{,}9x_1+2{,}5x_2+1{,}3x_3+32{,}1x_4&=49{,}72.
\end{aligned}\right\}\tag{9.10}$$

Решение. Приведем систему к виду (9.6):

$$\begin{aligned}
x_1&=\frac{1}{20{,}9}(21{,}70-1{,}2x_2-2{,}1x_3-0{,}9x_4),\\
x_2&=\frac{1}{21{,}2}(27{,}46-1{,}2x_1-1{,}5x_3-2{,}5x_4),\\
x_3&=\frac{1}{19{,}8}(28{,}76-2{,}1x_1-1{,}5x_2-1{,}3x_4),\\
x_4&=\frac{1}{32{,}1}(49{,}72-0{,}9x_1-2{,}5x_2-1{,}3x_3).
\end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты полученной системы удовлетворяют условию (9.4). Действительно,

$$\sum_{j=1}^{4}|c_{1j}|\approx 0{,}20<1,\qquad \sum_{j=1}^{4}|c_{2j}|\approx 0{,}24<1,$$
$$\sum_{j=1}^{4}|c_{3j}|\approx 0{,}25<1,\qquad \sum_{j=1}^{4}|c_{4j}|\approx 0{,}15<1.$$

Таким образом, сходимость итераций гарантирована. При этом $\alpha=0{,}25$, так что точность k-го приближения может быть оценена по формуле (9.4″) при $\frac{\alpha}{1-\alpha}=\frac{1}{3}$.

В качестве начального вектора $\boldsymbol{x}^{(0)}$ возьмем элементы столбца свободных членов, округлив их значения до двух знаков после запятой:

$$\boldsymbol{x}^{(0)}=\begin{pmatrix}1,04\\1,30\\1,45\\1,55\end{pmatrix}.$$

Вычисления будем вести до тех пор, пока величины $|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}|$ $(i=1, 2, 3, 4)$ не станут меньше $\varepsilon=10^{-3}$.

Последовательно вычисляем:

при $k=1$

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{20,9}(21,70-1,560-3,045-1,395)=0,75,$$
$$x_2^{(1)}=\frac{1}{21,2}(27,46-1,248-2,175-3,875)=0,95,$$
$$x_3^{(1)}=\frac{1}{19,8}(28,76-2,184-1,950-2,015)=1,14,$$
$$x_4^{(1)}=\frac{1}{32,1}(49,72-0,936-3,250-1,885)=1,36;$$

при $k=2$

$$x_1^{(2)}=\frac{16,942}{20,9}=0,8106, \qquad x_3^{(2)}=\frac{23,992}{19,8}=1,2117,$$
$$x_2^{(2)}=\frac{21,450}{21,2}=1,0118, \qquad x_4^{(2)}=\frac{45,188}{32,1}=1,4077;$$

при $k=3$

$$x_1^{(3)}=\frac{16,67434}{20,9}=0,7978, \qquad x_3^{(3)}=\frac{23,71003}{19,8}=1,1975,$$
$$x_2^{(3)}=\frac{21,15048}{21,2}=0,9977, \qquad x_4^{(3)}=\frac{44,88575}{32,1}=1,3983;$$

при $k=4$

$$x_1^{(4)}=\frac{16,7295}{20,9}=0,8004, \qquad x_3^{(4)}=\frac{23,7703}{19,8}=1,2005,$$
$$x_2^{(4)}=\frac{21,2106}{21,2}=1,0005, \qquad x_4^{(4)}=\frac{44,9510}{32,1}=1,4003.$$

Вычисляем модули разностей значений $x_i^{(k)}$ при $k=3$ и $k=4$:

$$|x_1^{(3)}-x_1^{(4)}|=0,0026, \qquad |x_3^{(3)}-x_3^{(4)}|=0,0030,$$
$$|x_2^{(3)}-x_2^{(4)}|=0,0028, \qquad |x_4^{(3)}-x_4^{(4)}|=0,0020.$$

Так как все они больше заданного числа $\varepsilon=10^{-3}$, продолжаем итерации.

Получаем при $k=5$:

$$x_1^{(5)}=\frac{16,71808}{20,9}=0,7999,\qquad x_3^{(5)}=\frac{23,75802}{19,8}=1,1999,$$

$$x_2^{(5)}=\frac{21,19802}{21,2}=0,9999,\qquad x_4^{(5)}=\frac{44,93774}{32,1}=1,3999.$$

Находим модули разностей значений $x_i^{(k)}$ при $k=4$ и $k=5$:

$$|x_1^{(4)}-x_1^{(5)}|=0,0005,\qquad |x_3^{(4)}-x_3^{(5)}|=0,0006,$$

$$|x_2^{(4)}-x_2^{(5)}|=0,0006,\qquad |x_4^{(4)}-x_4^{(5)}|=0,0004.$$

Они меньше заданного числа ε, поэтому в качестве решения возьмем

$$x_1\approx 0,7999,\qquad x_2=0,9999,\qquad x_3=1,1999,\qquad x_4=1,3999.$$

В соответствии с оценкой (9.4″) погрешности этих значений не должны превышать $\frac{1}{3}\cdot 0,0006=0,0002$.

Для сравнения приводим точные значения неизвестных:

$$x_1=0,8,\qquad x_2=1,0,\qquad x_3=1,2,\qquad x_4=1,4.$$

Пример 9.2. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 1,02\ x_1-0,05\ x_2-0,10\ x_3&=0,795,\\ -0,11\ x_1+1,03\ x_2-0,05\ x_3&=0,849,\\ -0,11\ x_1-0,12\ x_2+1,04\ x_3&=1,398,\end{aligned}\right\}\qquad (9.11)$$

произведя три итерации. Указать погрешность полученного результата.

Решение. Матрица данной системы такова, что диагональные элементы близки к единице, а все остальные — значительно меньше единицы. Поэтому для применения метода итераций естественно записать систему (9.11) в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1&=0,795-0,02\ x_1+0,05\ x_2+0,10\ x_3,\\ x_2&=0,849+0,11\ x_1-0,03\ x_2+0,05\ x_3,\\ x_3&=1,398+0,11\ x_1+0,12\ x_2-0,04\ x_3.\end{aligned}\right\}$$

Условия сходимости (9.4) для полученной системы выполнены. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{3}|c_{1j}|=0,02+0,05+0,10=0,17<1,$$

$$\sum_{j=1}^{3}|c_{2j}|=0,11+0,03+0,05=0,19<1,$$

$$\sum_{j=1}^{3}|c_{3j}|=0,11+0,12+0,04=0,27<1.$$

Берем в качестве начального вектора $\boldsymbol{x}^{(0)}$ столбец свободных членов, округлив его элементы до двух знаков после запятой:

$$\boldsymbol{x}^{(0)}=\begin{pmatrix}0,80\\0,85\\1,40\end{pmatrix}.$$

Далее последовательно находим:
при $k=1$

$$x_1^{(1)}=0{,}795-0{,}016+0{,}0425+0{,}140=0{,}9615\approx 0{,}962,$$
$$x_2^{(1)}=0{,}849+0{,}088-0{,}0255+0{,}070=0{,}9815\approx 0{,}982,$$
$$x_3^{(1)}=1{,}398+0{,}088+0{,}1020-0{,}056=1{,}532;$$

при $k=2$

$$x_1^{(2)}=0{,}97806\approx 0{,}978,\qquad x_2^{(2)}=1{,}00196\approx 1{,}002,$$
$$x_3^{(2)}=1{,}56038\approx 1{,}560;$$

при $k=3$

$$x_1^{(3)}=0{,}980,\qquad x_2^{(3)}=1{,}004,\qquad x_3^{(3)}=1{,}563.$$

Значения неизвестных при $k=2$ и $k=3$ отличаются не более чем на $3\cdot 10^{-3}$; поэтому, если в качестве приближенных значений неизвестных взять

$$x_1\approx 0{,}980,\qquad x_2\approx 1{,}004,\qquad x_3\approx 1{,}563,$$

то погрешность этих приближенных значений не превзойдет

$$\frac{0{,}27}{1-0{,}27}\cdot 3\cdot 10^{-3}<1{,}1\cdot 10^{-3}.$$

ЗАДАЧИ

Решить системы методом простой итерации. Продолжать итерации до тех пор, пока разница между последовательными приближениями неизвестных $x_i^{(k)}$ не станет меньше указанного числа ε.

В задачах 1, 2 сравнить ответ с данными точными значениями неизвестных.

1. $$A=\begin{pmatrix} 1{,}02 & -0{,}25 & -0{,}30 \\ -0{,}41 & 1{,}13 & -0{,}15 \\ -0{,}25 & -0{,}14 & 1{,}21 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0{,}515 \\ 1{,}555 \\ 2{,}780 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 2{,}0 \\ 2{,}5 \\ 3{,}0 \end{pmatrix},$$
$$\varepsilon=10^{-3}.$$

2. $$A=\begin{pmatrix} 10{,}9 & 1{,}2 & 2{,}1 & 0{,}9 \\ 1{,}2 & 11{,}2 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 2{,}1 & 1{,}5 & 9{,}8 & 1{,}3 \\ 0{,}9 & 2{,}5 & 1{,}3 & 12{,}1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -7{,}0 \\ 5{,}3 \\ 10{,}3 \\ 24{,}6 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\varepsilon=10^{-3}.$$

3. $$A=\begin{pmatrix} 4{,}00 & 0{,}24 & -0{,}08 & 0{,}16 \\ 0{,}09 & 3{,}00 & -0{,}15 & -0{,}12 \\ 0{,}04 & -0{,}08 & 4{,}00 & 0{,}06 \\ 0{,}02 & 0{,}06 & 0{,}04 & -10{,}00 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\varepsilon=0{,}5\cdot 10^{-3}.$$

4. $$A=\begin{pmatrix} 8{,}714 & 2{,}180 & 5{,}684 \\ -1{,}351 & 10{,}724 & 5{,}224 \\ 2{,}489 & -0{,}459 & 6{,}799 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 49{,}91 \\ 50{,}17 \\ 32{,}68 \end{pmatrix},\quad \varepsilon=10^{-4}.$$

5. $A=\begin{pmatrix} 24{,}21+\alpha & 2{,}42 & 3{,}85 \\ 2{,}31 & 31{,}49 & 1{,}52 \\ 3{,}49 & 4{,}85 & 28{,}72+\alpha \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 30{,}24 \\ 40{,}95-\beta \\ 42{,}81 \end{pmatrix},$

$\varepsilon=10^{-4}, \quad \alpha=0{,}2\cdot k, \quad k=0, 1, \ldots, 4, \quad \beta=0{,}2\cdot k, \quad k=0, 1, \ldots, 5.$

§ 10. Метод Зейделя

Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации. Он заключается в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестного x_i при $i>1$ используются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Таким образом, для системы (9.2) вычисления по методу Зейделя ведутся по формулам

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(k+1)}=c_{11}x_1^{(k)}+c_{12}x_2^{(k)}+\ldots+c_{1n}x_n^{(k)}+f_1, \\ x_2^{(k+1)}=c_{21}x_1^{(k+1)}+c_{22}x_2^{(k)}+\ldots+c_{2n}x_n^{(k)}+f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)}=c_{n1}x_1^{(k+1)}+c_{n2}x_2^{(k+1)}+\ldots+c_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}+c_{nn}x_n^{(k)}+f_n. \end{array}\right\} \quad (10.1)$$

Указанные в § 9 условия сходимости для метода простой итерации остаются верными и для метода Зейделя. Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, хотя это бывает не всегда (см. [54]). Кроме того, метод Зейделя может оказаться более удобным при программировании, так как при вычислении $x_i^{(k+1)}$ нет необходимости хранить значения $x_1^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$.

Рекомендации к применению метода Зейделя остаются теми же, что и для метода простой итерации.

Пример 10.1. Методом Зейделя решить систему (9.10).

Решение. В примере 9.1 эта система уже была приведена к виду (9.6) и там же был выбран начальный вектор $x^{(0)}$. Проведем теперь итерации методом Зейделя. При $k=1$

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{20{,}9}(21{,}70-1{,}560-3{,}045-1{,}395)=0{,}7512.$$

При вычислении $x_2^{(1)}$ используем уже полученное значение $x_1^{(1)}$:

$$x_2^{(1)}=\frac{1}{21{,}2}(27{,}46-0{,}900-2{,}175-3{,}875)=0{,}9674.$$

При вычислении $x_3^{(1)}$ используем значения $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$:

$$x_3^{(1)}=\frac{1}{19{,}8}(28{,}76-1{,}575-1{,}455-2{,}015)=1{,}1977.$$

Наконец, используя значения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$, получаем

$$x_4^{(1)}=\frac{1}{32{,}1}(49{,}72-0{,}675-2{,}425-1{,}560)=1{,}4037.$$

Аналогичным образом ведем вычисления при $k=2$ и $k=3$.

Получаем:

при $k=2$

$$x_1^{(2)}=\frac{16,76062}{20,9}=0,8019, \qquad x_3^{(2)}=\frac{23,75180}{19,8}=1,9996,$$

$$x_2^{(2)}=\frac{21,19202}{21,2}=0,9996, \qquad x_4^{(2)}=\frac{44,93981}{32,1}=1,4000;$$

при $k=3$

$$x_1^{(3)}=\frac{16,72132}{20,9}=0,80006, \qquad x_3^{(3)}=\frac{23,759844}{19,8}=1,19999,$$

$$x_2^{(3)}=\frac{21,200528}{21,2}=1,00002, \qquad x_4^{(3)}=\frac{44,939909}{32,1}=1,40000.$$

В табл. 10.1 приводятся значения неизвестных системы (9.10), полученные на третьем шаге методом Зейделя и методом простой итерации, а также точные значения. Сравнение показывает, что здесь метод Зейделя быстрее ведет к цели.

Таблица 10.1

Значения неизвестных системы (9.10)

	x_1	x_2	x_3	x_4
Метод простой итерации	0,7978	0,9977	1,1975	1,3983
Метод Зейделя	0,80006	1,00002	1,19999	1,40000
Точные значения	0,8	1,0	1,2	1,4

Пример 10.2. Для системы

$$\left.\begin{aligned} 6x_1-x_2-x_3&=11,33,\\ -x_1+6x_2-x_3&=32,\\ -x_1-x_2+6x_3&=42, \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

известны приближенные значения неизвестных, полученные с тремя значащими цифрами методом Гаусса:

$$x_1\approx 4,67, \qquad x_2\approx 7,62, \qquad x_3\approx 9,05.$$

Методом Зейделя уточнить решения так, чтобы значения неизвестных $x_i^{(k)}$ и $x_i^{(k+1)}$ отличались не более чем на $5\cdot 10^{-4}$.

Решение. Приведем систему (10.2) к виду

$$x_1=\frac{1}{6}(11,33+x_2+x_3),$$

$$x_2=\frac{1}{6}(32+x_1+x_3),$$

$$x_3=\frac{1}{6}(42+x_1+x_2).$$

Взяв в качестве начального приближения полученные методом Гаусса значения

$$x_1^{(0)}=4{,}67, \quad x_2^{(0)}=7{,}62, \quad x_3^{(0)}=9{,}05,$$

получим:

при $k=1$

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{6}(11{,}33+16{,}67)=4{,}66667,$$

$$x_2^{(1)}=\frac{1}{6}(32+13{,}71667)=7{,}61944,$$

$$x_3^{(1)}=\frac{1}{6}(42+12{,}28611)=9{,}04768;$$

при $k=2$

$$x_1^{(2)}=\frac{1}{6}(11{,}33+16{,}66712)=4{,}66619,$$

$$x_2^{(2)}=\frac{1}{6}(32+13{,}71387)=7{,}61897,$$

$$x_3^{(2)}=\frac{1}{6}(42+12{,}28516)=9{,}04752.$$

Так как для приведенной системы выполняется условие (9.4) при $\alpha=1/3$, то полученное приближение имеет погрешность, не превышающую $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10^{-4}=2{,}5\cdot 10^{-4}$.

Таким образом, в качестве решения можем принять

$$x_1\approx 4{,}666, \quad x_2\approx 7{,}619, \quad x_3\approx 9{,}048.$$

ЗАДАЧИ

Системы 1, 2 решить методом простой итерации и методом Зейделя. Сравнить скорости сходимости итераций. Полученные значения сравнить с указанными точными значениями неизвестных.

1. $A=\begin{pmatrix}6{,}1 & 2{,}2 & 1{,}2\\ 2{,}2 & 5{,}5 & -1{,}5\\ 1{,}2 & -1{,}5 & 7{,}2\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}16{,}55\\ 10{,}55\\ 16{,}80\end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix}1{,}5\\ 2{,}0\\ 2{,}5\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}3{,}82 & 1{,}02 & 0{,}75 & 0{,}81\\ 1{,}05 & 4{,}53 & 0{,}98 & 1{,}53\\ 0{,}73 & 0{,}85 & 4{,}71 & 0{,}81\\ 0{,}88 & 0{,}81 & 1{,}28 & 3{,}50\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}15{,}655\\ 22{,}705\\ 23{,}480\\ 16{,}110\end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix}2{,}5\\ 3{,}0\\ 3{,}5\\ 2{,}0\end{pmatrix}.$

3. Решить методом Зейделя системы из задач 3—5 § 9.

4. Решить данную систему методом Зейделя. Итерации продолжать до тех пор, пока модуль разности между последовательными приближениями неизвестных $|x_i^{(k)}-x_i^{(k+1)}|$ $(i=1, 2, 3)$ не станет меньше 0,02.

$$\begin{aligned}10x_1+2x_2+6x_3&=2{,}8,\\ x_1+10x_2+9x_3&=7,\\ 2x_1-7x_2-10x_3&=-17.\end{aligned}$$

§ 11. Применение метода итераций для уточнения элементов обратной матрицы

Пусть для неособенной матрицы A получены приближенные значения элементов обратной матрицы A^{-1}. Обозначим матрицу с такими элементами через $D_0 \approx A^{-1}$; для уточнения элементов обратной матрицы строим следующий итерационный процесс:

$$F_{k-1} = E - AD_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{11.1}$$

$$D_k = D_{k-1}(E + F_{k-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{11.2}$$

Доказано (см. [2], [12]), что итерации сходятся, если начальная матрица D_0 достаточно близка к искомой матрице A^{-1}.

Матрица F_{k-1} на каждом шаге характеризует в некотором смысле степень близости матрицы D_{k-1} к матрице A^{-1}.

Обычно итерации продолжают до тех пор, пока элементы матрицы F_k по модулю не станут меньше заданного числа ε, и тогда приближенно полагают

$$A^{-1} \approx D_k.$$

Указанный итерационный процесс оказывается весьма полезным, так как точные методы вычисления обратной матрицы часто приводят к заметным погрешностям, вызванным неизбежными ошибками округления и большим количеством арифметических операций при расчете.

Пример 11.1. Уточнить элементы приближенной обратной матрицы, полученной в примере 8.1. Итерации продолжать до тех пор, пока элементы матрицы F_k по модулю не станут меньше или равны $5 \cdot 10^{-5}$.

Решение. Для матрицы (8.3) методом Гаусса была получена приближенная обратная матрица. Примем ее за начальное приближение D_0:

$$D_0 = \begin{pmatrix} -0{,}21121 & -0{,}46003 & 0{,}16284 & 0{,}26956 \\ -0{,}03533 & 0{,}16873 & 0{,}01573 & -0{,}08920 \\ 0{,}23030 & 0{,}04607 & -0{,}00944 & -0{,}19885 \\ -0{,}29316 & -0{,}38837 & 0{,}06128 & 0{,}18513 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу

$$F_0 = E - AD_0.$$

Произведение AD_0 было вычислено на стр. 75. Вычитая его из единичной матрицы, получаем

$$F_0 = E - AD_0 = 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}00 & 0{,}01 & 0{,}00 \\ 0{,}25 & 0{,}03 & 0{,}02 & 0{,}39 \\ 8{,}08 & 10{,}17 & 0{,}18 & -0{,}09 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & -0{,}48 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим произведение D_0F_0:

$$D_0F_0=\begin{pmatrix}-0,21121 & -0,46003 & 0,16284 & 0,26956\\ -0,03533 & 0,16873 & 0,01573 & -0,08920\\ 0,23030 & 0,04607 & -0,00944 & -0,19885\\ -0,29316 & -0,38837 & 0,06128 & 0,18513\end{pmatrix}\times$$

$$\times 10^{-3}\cdot\begin{pmatrix}0,03 & 0,00 & 0,01 & 0,00\\ 0,25 & 0,03 & 0,02 & 0,39\\ 8,08 & 10,17 & 0,18 & -0,09\\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,48\end{pmatrix}=$$

$$=10^{-3}\cdot\begin{pmatrix}1,19 & 1,64 & 0,02 & -0,32\\ 0,17 & 0,16 & 0,01 & 0,11\\ -0,06 & -0,09 & 0,00 & 0,11\\ 0,39 & 0,61 & 0,00 & -0,24\end{pmatrix}.$$

Далее по формуле (11.2) при $k=1$ находим

$$D_1=D_0+D_0F_0=\begin{pmatrix}-0,21121 & -0,46003 & 0,16284 & 0,26956\\ -0,03533 & 0,16873 & 0,01573 & -0,08920\\ 0,23030 & 0,04607 & -0,00944 & -0,19885\\ -0,29316 & -0,38837 & 0,06128 & 0,18513\end{pmatrix}+$$

$$+10^{-3}\cdot\begin{pmatrix}1,19 & 1,64 & 0,02 & -0,32\\ 0,17 & 0,16 & 0,01 & 0,11\\ -0,06 & -0,09 & 0,00 & 0,11\\ 0,39 & 0,61 & 0,00 & -0,24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-0,21002 & -0,45839 & 0,16286 & 0,26924\\ -0,03516 & 0,16889 & 0,01574 & -0,08909\\ 0,23024 & 0,04598 & -0,00944 & -0,19874\\ -0,29277 & -0,38776 & 0,06128 & 0,18489\end{pmatrix}.$$

Для того чтобы проверить, достигнута ли заданная точность, вычислим произведение матриц AD_1:

$$AD_1=E-10^{-5}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & -5 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$F_1=E-AD_1=10^{-5}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & -5 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Так как наибольший по модулю элемент матрицы F_1 равен $5\cdot 10^{-5}$, мы можем с заданной точностью написать

$$A^{-1}\approx D_1.$$

ЗАДАЧИ

1. Для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 24,21+\alpha & 2,42 & 3,85 \\ 2,31 & 31,49 & 1,52 \\ 3,49 & 4,85 & 28,72+\alpha \end{pmatrix},\quad \alpha=0,2\cdot n,\quad n=0, 1, \ldots, 10,$$

найти обратную A^{-1}. Взять в качестве начального приближения обратную матрицу, полученную в задаче 5 § 8, округлив ее элементы до трех знаков после запятой. Итерации вести до тех пор, пока элементы матрицы F_k не станут по модулю меньше чем 10^{-5}.

ГЛАВА IV

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Метод Ньютона для системы двух уравнений

Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Согласно методу Ньютона последовательные приближения вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} = x_n - \frac{\Delta_x^{(n)}}{J(x_n, y_n)}, \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix} = y_n - \frac{\Delta_y^{(n)}}{J(x_n, y_n)}, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где

$$\Delta_x^{(n)} = \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y^{(n)} = \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix},$$

а якобиан

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} F'_x(x, y) & F'_y(x, y) \\ G'_x(x, y) & G'_y(x, y) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Начальные приближения x_0, y_0 определяются грубо приближенно (графически, прикидкой и т. п.).

Метод Ньютона эффективен только при достаточной близости начального приближения к решению системы.

Пример 1.1. Найти вещественные корни системы

$$F(x, y) \equiv 2x^3 - y^2 - 1 = 0,$$
$$G(x, y) \equiv xy^3 - y - 4 = 0.$$

Решение. Графическим путем находим приближенные значения $x_0 = 1{,}2$ и $y_0 = 1{,}7$. Вычисляя якобиан в точке (1,2; 1,7), имеем

$$J(x,\ y)=\begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2-1 \end{vmatrix},$$

$$J(1{,}2;\ 1{,}7)=\begin{vmatrix} 8{,}64 & -3{,}40 \\ 4{,}91 & 9{,}40 \end{vmatrix}=97{,}910.$$

По формулам (1.2) получаем

$$x_1=1{,}2-\frac{1}{97{,}910}\begin{vmatrix} -0{,}434 & -3{,}40 \\ 0{,}1956 & 9{,}40 \end{vmatrix}=1{,}2+0{,}0349=1{,}2349,$$

$$y_1=1{,}7-\frac{1}{97{,}910}=\begin{vmatrix} 8{,}64 & -0{,}434 \\ 4{,}91 & 0{,}1956 \end{vmatrix}=1{,}7-0{,}0390=1{,}6610.$$

Продолжая этот процесс с полученными значениями x_1 и y_1, получим

$$x_2=1{,}2343,\qquad y_2=1{,}6615 \text{ и т. д.}$$

Пример 1.2. Решить систему уравнений

$$F(x,\ y)\equiv\cos(0{,}4y+x^2)+x^2+y^2-1{,}6=0,$$

$$G(x,\ y)\equiv 1{,}5x^2-\frac{y^2}{0{,}36}-1=0.$$

Решение. Графически находим приближенные значения

$$x_0=1{,}04,\qquad y_0=0{,}47.$$

Дальнейшие приближения найдем по формулам (1.2):

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\Delta_x^{(n)}}{J(x_n,\ y_n)},$$

$$y_{n+1}=y_n-\frac{\Delta_y^{(n)}}{J(x_n,\ y_n)}.$$

Все вычисления помещены в табл. 1.1.

Ответ: $x=1{,}03864$, $y=0{,}47173$.

Таблица 1.1

x	1,04	1,03864	F'_y	0,55801	0,56172	J	—1,98549	—1,99889
y	0,47	0,47173	G'_x	3,12	3,11592	$-\frac{\Delta_x}{J}$	—0,00136	0,00000
F	—0,00084	0,00000	G'_y	—2,61111	—2,62072			
G	0,00879	0,00002	Δ_x	—0,00271	0,00001	$-\frac{\Delta_y}{J}$	0,00173	0,00000
F'_x	0,09364	0,09483	Δ_y	+0,00344	0,00000			

ЗАДАЧИ

В задачах 1, 2 решить с помощью метода Ньютона следующие системы. Результаты получить с пятью верными знаками. Начальные приближения найти графически.

1. $\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(xy+k)&=x^2,\\ \alpha x^2+2y^2&=1,\end{aligned}\right\}$ $x>0,\ y>0,\ \alpha=0{,}5+0{,}1\cdot m,\ k=0{,}1\cdot m$ $(m=0,\ 1,\ \ldots,\ 4)$.

2. $\left.\begin{aligned}e^{xy}&=x^2-y+\alpha,\\ (x+0{,}5)^2+y^2&=k,\end{aligned}\right\}$ $x>0,\ y>0,\ \alpha=1+0{,}1\cdot m,\ k=0{,}6+$ $+\,0{,}1\cdot m\quad(m=0,\ 1,\ \ldots,\ 4)$.

§ 2. Метод простой итерации для системы двух уравнений

Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned}F_1(x,\ y)&=0,\\ F_2(x,\ y)&=0,\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

действительные корни которых требуется найти с заданной степенью точности.

Предположим, что система (2.1) допускает лишь изолированные корни. Число этих корней и их приближенные значения можно установить, построив кривые $F_1(x,\ y)=0$ и $F_2(x,\ y)=0$ и определив координаты их точек пересечения.

Для применения метода итераций система (2.1) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi_1(x,\ y),\\ y&=\varphi_2(x,\ y).\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

Функции $\varphi_1(x,\ y)$ и $\varphi_2(x,\ y)$ называются *итерирующими*. Алгоритм решения задается формулами

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1}&=\varphi_1(x_n,\ y_n),\\ y_{n+1}&=\varphi_2(x_n,\ y_n)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

где x_0, y_0 — некоторое начальное приближение.

Имеет место следующая теорема.

Пусть в некоторой замкнутой окрестности $R\ (a\leqslant x\leqslant A,\ b\leqslant y\leqslant B)$ *имеется одно и только одно решение* $x=\xi,\ y=\eta$ *системы* (2.2). *Если*

1) *функции* $\varphi_1(x,\ y)$ *и* $\varphi_2(x,\ y)$ *определены и непрерывно дифференцируемы в* R,

2) *начальные приближения* x_0, y_0 *и все последующие приближения* x_n, y_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ *принадлежат* R,

3) *в* R *выполнены неравенства*

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|&\leqslant q_1<1,\\ \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|&\leqslant q_2<1,\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

то процесс последовательных приближений (2.3) *сходится к решению* $x=\xi$, $y=\eta$ *системы, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi\quad \text{и}\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\eta.$$

Эта теорема остается верной, если условие (2.4) заменить условием

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| \leqslant q_1 < 1, \\ \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \leqslant q_2 < 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4')$$

Оценка погрешности n-го приближения дается неравенством

$$|\xi-x_n|+|\eta-y_n| \leqslant \frac{M}{1-M}(|x_n-x_{n-1}|+|y_n-y_{n-1}|),$$

где M — наибольшее из чисел q_1, q_2, входящих в неравенства (2.4) или в неравенства (2.4′). Сходимость метода итераций считается хорошей, если $M<1/2$, при этом $\frac{M}{1-M}<1$, так что если в двух последовательных приближениях совпадают, скажем, первые три десятичных знака после запятой, то ошибка последнего приближения не превосходит 0,001.

Пример 2.1. Для системы

$$x^3+y^3-6x+3=0, \quad x^3-y^3-6y+2=0$$

найти положительные корни с тремя верными знаками.

Решение. Для применения метода итераций запишем данную систему в таком виде:

$$x=\frac{x^3+y^3}{6}+\frac{1}{2}\equiv\varphi_1(x,\ y), \qquad y=\frac{x^3-y^3}{6}+\frac{1}{3}\equiv\varphi_2(x,\ y).$$

Рассмотрим квадрат $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Если точка $(x_0,\ y_0)$ находится в этом квадрате, то имеем

$$0<\varphi_1(x_0,\ y_0)<1 \quad \text{и} \quad 0<\varphi_2(x_0,\ y_0)<1.$$

Так как $0<(x_0^3+y_0^3)/6<1/3$, $-1/6<(x_0^3-y_0^3)/6<1/6$, то при любом выборе точки $(x_0,\ y_0)$ последовательность $(x_k,\ y_k)$ остается в квадрате. Более того, точки $(x_k,\ y_k)$ остаются в прямоугольнике $1/2<x<5/6$, $1/6<y<1/2$ (так как $1/3+1/2=5/6$, $1/3-1/6=1/6$, $1/3+1/6=1/2$). Для точек этого прямоугольника имеем

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}<\frac{25/36+1/4}{2}=\frac{34}{72}<1,$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|=\frac{x^2}{2}+\left|-\frac{y^2}{2}\right|<\frac{34}{72}<1.$$

Следовательно, существует единственное решение в указанном прямоугольнике и оно может быть найдено методом итераций. Полагая $x_0=1/2$, $y_0=1/2$, будем иметь

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{1/8+1/8}{6}=0{,}542, \qquad x_2=\frac{1}{2}+\frac{0{,}19615}{6}=0{,}533,$$

$$y_1=\frac{1}{3}+\frac{1/8-1/8}{6}=0{,}333, \qquad y_2=\frac{1}{3}+\frac{0{,}1223}{6}=0{,}354.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$x_3 = 0{,}533, \quad x_4 = 0{,}532, \quad y_3 = 0{,}351, \quad y_4 = 0{,}351.$$

Так как здесь $q_1 = q_2 = 34/72 < 0{,}5$, то совпадение первых трех десятичных знаков свидетельствует о достижении требуемой точности.

Таким образом, можно принять $\xi = 0{,}532$, $\eta = 0{,}351$.

Замечание. Вместо рассмотренного итерационного процесса (2.3) иногда удобнее пользоваться так называемым «процессом Зейделя»:

$$x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n), \qquad y_{n+1} = \varphi_2(x_{n+1}, y_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Построение итерирующих функций для системы (2.1). Для преобразования системы уравнений (2.1) к виду (2.2) с соблюдением условия (2.4) можно рекомендовать следующий прием. Положим

$$\varphi_1(x, y) = x + \alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y),$$
$$\varphi_2(x, y) = y + \gamma F_1(x, y) + \delta F_2(x, y) \quad (\alpha\delta \neq \beta\gamma).$$

Коэффициенты α, β, γ, δ найдем как приближенные решения следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \alpha \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \beta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} &= 0, \\ \alpha \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \beta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} &= 0, \\ \gamma \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \delta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} &= 0, \\ 1 + \gamma \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \delta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

При таком выборе параметров условие (2.4) будет соблюдено, если только частные производные функций $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ изменяются не очень быстро в окрестности (x_0, y_0).

Пример 2.2. Выбрать подходящие итерирующие функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ для системы уравнений

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x^3 - y = 0$$

при $x_0 = 0{,}8$, $y_0 = 0{,}55$.

Решение. Будем искать функции φ_1 и φ_2 в виде

$$\varphi_1(x, y) = x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y),$$
$$\varphi_2(x, y) = y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y).$$

Для определения параметров α, β, γ, δ составим систему (2.5). Имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} = 1{,}6, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} = 1{,}1,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2, \qquad \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 1{,}92, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} = -1.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{aligned} 1+1{,}6\alpha+1{,}92\beta&=0,\\ 1{,}1\alpha-\quad\beta&=0,\\ 1{,}6\gamma+1{,}92\delta&=0,\\ 1+1{,}1\gamma-\quad\delta&=0. \end{aligned}$$

Решая, получим

$$\alpha\approx-0{,}3,\quad \gamma\approx-0{,}5,\quad \beta\approx-0{,}3,\quad \delta\approx0{,}4.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,\ y)&=x-0{,}3\,(x^2+y^2-1)-0{,}3\,(x^3-y),\\ \varphi_2(x,\ y)&=y-0{,}5\,(x^2+y^2-1)+0{,}4\,(x^3-y). \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1. Для системы

$$2x^2-xy-5x+1=0,\qquad x+3\lg x-y^2=0$$

найти положительные корни с четырьмя верными знаками.

В задачах 2, 3 найти корни, расположенные в области, ограниченной прямыми

$$y=0,\quad y=x,\quad x=0{,}5.$$

2. $2x^2-xy-y^2+2x-2y+6=0,\quad y-x-1=0.$

3. $\alpha x^3-y^2-1=0,$

$xy^3-y-4=0,\quad \alpha=1+0{,}5\cdot k\ \ (k=0,\,1,\,\ldots,\,5).$

В задачах 4, 5 решить системы уравнений. Результаты получить с пятью верными знаками.

4. $x^2y^2-3x^3-6y^3+8=0,\quad x^4-9y+2=0.$

5. $\sin x-y=1{,}32,\quad \cos y-x=-0{,}85.$

§ 3. Распространение метода Ньютона на системы n уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему уравнений, вообще говоря, нелинейную

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)&=0,\\ f_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)&=0,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\\ f_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)&=0 \end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

с действительными левыми частями.

Можно записать систему (3.1) в более компактном виде. Совокупность аргументов $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ можно рассматривать как

n-мерный вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Аналогично совокупность функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ представляет собой также n-мерный вектор (вектор-функцию)

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Поэтому система (3.1) кратко записывается так:

$$f(x) = 0. \tag{3.2}$$

Для решения системы (3.2) будем пользоваться методом последовательных приближений.

Предположим, что найдено p-е приближение

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$$

одного из изолированных корней $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторного уравнения (3.2). Тогда точный корень уравнения (3.2) можно представить в виде

$$x = x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}, \tag{3.3}$$

где $\varepsilon^{(p)} = (\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)}, \dots, \varepsilon_n^{(p)})$ — поправки (погрешность корня).

Введем в рассмотрение матрицу Якоби системы функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right).$$

Если эта матрица неособенная, т. е. если $\det W(x) \neq 0$, то поправка $\varepsilon^{(p)}$ выражается следующим образом:

$$\varepsilon^{(p)} = -W^{-1}(x^{(p)}) \; f(x^{(p)}), \tag{3.4}$$

где $W^{-1}(x^{(p)})$ — матрица, обратная матрице Якоби.

Таким образом, последовательные приближения находятся по формуле

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}(x^{(p)}) f(x^{(p)}) \qquad (p = 0, 1, 2, \dots). \tag{3.5}$$

За нулевое приближение $\boldsymbol{x}^{(0)}$ можно взять грубое приближенное значение искомого корня (см. [12]).

Условия сходимости метода Ньютона исследованы Л. В. Канторовичем, А. М. Островским (см. [16], [34]).

Пример 3.1. Методом Ньютона приближенно найти положительное решение системы уравнений

$$x^2+y^2+z^2=1, \qquad 2x^2+y^2-4z=0, \quad 3x^2-4y+z^2=0,$$

исходя из начального приближения $x_0=y_0=z_0=0{,}5$.

Решение. Имеем

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} x^2+\ y^2+\ z^2-1 \\ 2x^2+\ y^2-4z \\ 3x^2-4y\ +\ z^2 \end{pmatrix},$$

отсюда

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(0)})=\begin{pmatrix} 0{,}25+0{,}25+0{,}25-1 \\ 0{,}50+0{,}25-2{,}00 \\ 0{,}75-2{,}00+0{,}25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}25 \\ -1{,}25 \\ -1{,}00 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу Якоби

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}^{(0)})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\det \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}^{(0)})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}=-40.$$

Находим обратную матрицу

$$\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{x}^{(0)})=-\frac{1}{40}\begin{pmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой (3.5), получим первое приближение

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)} - W^{-1}(\boldsymbol{x}^{(0)}) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(0)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1,00 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0 \\ -0,125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,875 \\ 0,500 \\ 0,375 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем второе приближение $\boldsymbol{x}^{(2)}$. Имеем

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,875^2 + 0,500^2 + 0,375^2 - 1 \\ 2 \cdot 0,875^2 + 0,500^2 - 4 \cdot 0,375 \\ 3 \cdot 0,875^2 - 4 \cdot 0,500 + 0,375^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15625 \\ 0,28125 \\ 0,43750 \end{pmatrix},$$

$$W(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0,875 & 2 \cdot 0,500 & 2 \cdot 0,375 \\ 4 \cdot 0,875 & 2 \cdot 0,500 & -4 \\ 6 \cdot 0,875 & -4 & 2 \cdot 0,375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,750 & 1 & 0,750 \\ 3,500 & 1 & -4 \\ 5,250 & -4 & 0,750 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\det W(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \begin{vmatrix} 1,750 & 1 & 0,750 \\ 3,500 & 1 & -4 \\ 5,250 & -4 & 0,750 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,750 & 1 & 0,750 \\ 1,750 & 0 & -4,750 \\ 12,250 & 0 & 3,750 \end{vmatrix} = -64,75,$$

$$W^{-1}(\boldsymbol{x}^{(1)}) = -\frac{1}{64,75} \begin{pmatrix} -15,25 & -3,75 & -4,75 \\ -23,625 & -2,6250 & 9,625 \\ -19,25 & 12,25 & -1,75 \end{pmatrix}.$$

По формуле (3.5) получаем

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(1)} - W^{-1}(\boldsymbol{x}^{(1)}) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(1)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,875 \\ 0,500 \\ 0,375 \end{pmatrix} + \frac{1}{64,75} \begin{pmatrix} -15,25 & -3,75 & -4,75 \\ -23,625 & -2,6250 & 9,625 \\ -19,25 & 12,25 & -1,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,15625 \\ 0,28125 \\ 0,43750 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,875 \\ 0,500 \\ 0,375 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,08519 \\ 0,00338 \\ 0,00507 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,78981 \\ 0,49662 \\ 0,36993 \end{pmatrix}.$$

Аналогично находятся дальнейшие приближения

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,78521 \\ 0,49662 \\ 0,36992 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0,00001 \\ 0,00004 \\ 0,00005 \end{pmatrix}.$$

Ограничиваясь третьим приближением, получим

$$x = 0,7852, \quad y = 0,4966, \quad z = 0,3699.$$

§ 4. Распространение метода итераций на системы n уравнений с n неизвестными

Пусть дана система нелинейных уравнений специального вида:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

где функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ действительны, определены и непрерывны в некоторой окрестности ω изолированного решения $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ этой системы, или в более компактной записи:

$$\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{x}), \tag{4.2}$$

где $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, а $\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\boldsymbol{x}) \\ \varphi_2(\boldsymbol{x}) \\ \ldots \\ \varphi_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$.

Для нахождения вектор-корня иногда можно использовать метод итераций

$$\boldsymbol{x}^{(p+1)} = \varphi(\boldsymbol{x}^{(p)}) \qquad (p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.3}$$

Если система уравнений задана в общем виде

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{4.4}$$

где $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ — вектор-функция, определенная и непрерывная в окрестности ω изолированного вектор-корня $\boldsymbol{x}^*$, то ее записывают в эквивалентном виде

$$\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{x}), \tag{4.5}$$

где $\varphi(\boldsymbol{x})$ — *итерирующая вектор-функция*, которую ищут в виде

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \Lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Матрица Λ выбирается так (обозначения см. на стр. 96):

$$\Lambda = -\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{x}^{(0)}).$$

Предполагается, что матрица $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}^{(0)})$ — неособенная.

Подставив $\varphi(\boldsymbol{x})$ в (4.3), получим итерационную формулу

$$\boldsymbol{x}^{(p+1)} = \boldsymbol{x}^{(p)} + \Lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(p)}). \tag{4.6}$$

ЗАДАЧИ

Решить методом итераций следующие системы:

1. $$\left.\begin{aligned} x &= \lg\frac{y}{z} + 1, \\ y &= 0{,}4 + z^2 - 2x^2, \\ z &= 2 + \frac{xy}{20}, \end{aligned}\right\} \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 2{,}2, \quad z_0 = 2.$$

2. $$\left.\begin{aligned} x + x^2 - 2yz &= 0{,}1, \\ y - y^2 + 3xz &= -0{,}2, \\ z + z^2 + 2xy &= 0{,}3, \end{aligned}\right\} \quad x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

ГЛАВА V

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Постановка задачи интерполирования

Пусть функция $y=f(x)$ задана таблицей:

$$y_0=f(x_0),\quad y_1=f(x_1),\ \ldots,\ y_n=f(x_n).$$

Задача интерполирования ставится обычно в следующей форме: *найти многочлен* $P(x)=P_n(x)$ *степени не выше* n, *значения которого в точках* x_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *совпадают со значениями данной функции, т. е.* $P(x_i)=y_i$.

Геометрически это означает, что нужно найти алгебраическую кривую вида $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i,\ y_i)$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ (рис. 1).

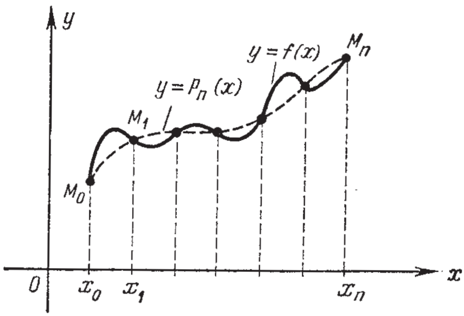

Рис. 1.

В такой постановке задача интерполирования называется *параболической*. Многочлен $P(x)$ называется *интерполяционным многочленом*. Точки x_i $(i=0,\ \ldots,\ n)$ называются *узлами интерполяции*.

Доказано (см. [1], [11], [58]), что в указанной постановке задача интерполирования всегда имеет единственное решение. Интерполяционные формулы обычно используются при нахождении неизвестных значений $f(x)$ для промежуточных значений аргумента. При этом различают *интерполирование в узком смысле*, когда x находится между x_0 и x_n, и *экстраполирование*, когда x находится вне отрезка $[x_0,\ x_n]$.

При оценке погрешности результатов должны учитываться как погрешность метода интерполяции (остаточный член), так и погрешности округления при вычислениях.

§ 2. Интерполирование для случая равноотстоящих узлов. Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона

Узлы интерполяции называются *равноотстоящими*, если

$$x_{i+1}-x_i=\Delta x_i=h=\text{const} \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Конечными разностями функции $y=f(x)$ называются разности вида

$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$ — конечные разности первого порядка,
$\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i$ — конечные разности второго порядка,

. . . .

$\Delta^k y_i=\Delta^{k-1}y_{i+1}-\Delta^{k-1}y_i$ — конечные разности k-го порядка.

Ниже дается *горизонтальная таблица* конечных разностей при $n=5$ (см. табл. 2.1).

1. Первая интерполяционная формула Ньютона имеет вид

$$y(x)=P_n(x)=$$
$$=y_0+q\,\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+\frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (2.1)$$

где $q=\dfrac{x-x_0}{h}$.

Заметим, что в формуле используется верхняя горизонтальная строка таблицы разностей. В табл. 2.1 элементы этой строки подчеркнуты. Остаточный член $R_n(x)$ формулы (2.1) имеет вид (см. [1], [12])

$$R_n(x)=$$
$$=h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \qquad (2.2)$$

где ξ — некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i ($i=0,\ 1,\ldots,\ n$) и точку x.

При наличии дополнительного узла x_{n+1} на практике пользуются более удобной приближенной формулой (см. [12])

$$R_n(x)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}q(q-1)\ldots(q-n). \qquad (2.3)$$

Таблица 2.1

Горизонтальная таблица конечных разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	$\underline{\Delta y_0}$	$\underline{\Delta^2 y_0}$	$\underline{\Delta^3 y_0}$	$\underline{\Delta^4 y_0}$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$		
x_4	y_4	Δy_4			
x_5	y_5				

Последняя формула полезна, например, в случае эмпирически заданных функций.

Число n желательно выбирать так, чтобы разности $\Delta^n y_i$ были *практически постоянными* (см. пример 2.1).

Формула (2.1) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к началу таблицы x_0.

При $n=1$ и $n=2$ из формулы (2.1) получаем частные случаи: линейная интерполяция

$$y(x)=y_0+q\,\Delta y_0, \qquad (2.4)$$

квадратичная интерполяция

$$y(x)=y_0+q\,\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0. \qquad (2.5)$$

Пример 2.1. По данной таблице значений функции $y=\lg x$ (табл. 2.2) найти $\lg 1001$.

Решение. Составляем таблицу разностей (табл. 2.2), записывая их в единицах седьмого разряда, и замечаем, что третьи разности практически постоянны. Поэтому в формуле (2.1) достаточно взять $n=3$:

$$y(x)=y_0+q\,\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0.$$

Для $x=1001$ имеем $q=0{,}1$. Таким образом,

$$\lg 1001=3{,}0000000+0{,}1\cdot 0{,}0043214+\frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{2}0{,}0000426+$$

$$+\frac{0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 1{,}9}{6}0{,}0000008=3{,}0004341.$$

Таблица 2.2

Значения и разности функции $y=\lg x$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	43 214	—426	8	1030	3,0128372	41 961	—401	
1010	3,0043214	42 788	—418	9	1040	3,0170333	41 560		
1020	3,0086002	42 370	—409	8	1050	3,0211893			

Оценим остаточный член. По формуле (2.2) при $n=3$ имеем

$$R_3(x)=\frac{h^4 q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}f^{(4)}(\xi),$$

где $1000<\xi<1030$.

Так как $f(x)=\lg x$, то $f^{(4)}(x)=-\frac{3!}{x^4}\lg e$; поэтому

$$|f^{(4)}(\xi)|<\frac{3!}{(1000)^4}\lg e.$$

При $h=10$ и $q=0{,}1$ окончательно получаем

$$|R_3(1001)|<\frac{0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 1{,}9\cdot 2{,}9\cdot 10^4\lg e}{4\cdot(1000)^4}\approx 0{,}5\cdot 10^{-9}.$$

Таким образом, остаточный член может повлиять только на девятый десятичный знак. Заметим, что полученное значение $\lg 1001$ полностью совпадает со значением в семизначной таблице логарифмов.

Пример 2.2. По данной таблице значений функции $y=1/x$ (табл. 2.3), пользуясь линейной интерполяцией, найти $1/2{,}718$.

Решение. Определяем $\Delta y_0 = -0{,}0028$ и $q = 0{,}018/0{,}02 = 0{,}9$ и по формуле (2.4) находим

$$\frac{1}{2{,}718} = 0{,}3704 - 0{,}0028 \cdot 0{,}9 = 0{,}3679.$$

Оценим остаточный член. По формуле (2.2) при $n = 1$ имеем

$$R_1(x) = \frac{h^2 q(q-1)}{2!} f''(\xi),$$

где $2{,}70 < \xi < 2{,}72$.

Так как $f(x) = 1/x$, то $f''(x) = 2/x^3$; поэтому

$$|R_1(2{,}718)| < \frac{(0{,}02)^2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}{(2{,}7)^3} \approx 0{,}2 \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом, остаточный член может повлиять только на шестой десятичный знак.

Таблица 2.3

Значения и разности функции $y = 1/x$

x	y	Δy
2,70	0,3704	—28
2,72	0,3676	—26
2,74	0,3650	

Таблица 2.4

Значения и разности функции $y = e^x$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
3,60	36,598	1,877	95
3,65	38,475	1,972	102
3,70	40,447	2,074	
3,75	42,521		

Пример 2.3. Используя таблицу значений функции $y = e^x$ (табл. 2.4), по формуле квадратичной интерполяции вычислить $e^{3,62}$ и $e^{3,58}$.

Решение. Вычисляем разности до второго порядка (см. табл. 2.4).

Для $x = 3{,}62$ находим $q = 0{,}02/0{,}05 = 0{,}4$ и вычисляем по формуле (2.5)

$$e^{3,62} = 36{,}598 + 0{,}4 \cdot 1{,}877 - \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{2} 0{,}095 = 37{,}338.$$

Остаточный член при $n = 2$ имеет вид

$$R_2(x) = \frac{h^3 q(q-1)(q-2)}{3!} f'''(\xi).$$

Так как $f'''(x) = e^x$ и $3{,}60 < \xi < 3{,}70$, получаем

$$|R_2(3{,}62)| < \frac{(0{,}05)^3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}6}{6} e^{3,70} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, в ответе можем считать все цифры верными.

Для $x = 3{,}58$ находим $q = -0{,}02/0{,}05 = -0{,}4$ и определяем по формуле (2.5)

$$e^{3,58} = 36{,}598 - 0{,}4 \cdot 1{,}877 + \frac{0{,}4 \cdot 1{,}4}{2} 0{,}095 = 35{,}874.$$

Для оценки остаточного члена имеем $3{,}58 < \xi < 3{,}70$, поэтому

$$|R_3(3{,}58)| < \frac{(0{,}05)^2 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}4 \cdot 2{,}4}{6} e^{3,70} \approx 10^{-3}.$$

Сравнивая остаточные члены при $x = 3{,}62$ и $x = 3{,}58$, замечаем, что экстраполяция при $x = 3{,}58$ дает менее точный результат.

2. Вторая интерполяционная формула Ньютона имеет вид

$$y(x) = P_n(x) = y_n + q\,\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (2.6)$$

где $q = \frac{x - x_n}{h}$.

В формуле используется нижняя наклонная строка разностей (см. табл. 2.1).

Остаточный член $R_n(x)$ формулы (2.6) имеет вид (см. [1], [14])

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \qquad (2.7)$$

где ξ — внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и точку x.

Формула (2.6) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к концу таблицы, т. е. к x_n.

Пример 2.4. Используя таблицу значений функции $y = \sin x$ (см. табл. 2.5), найти $\sin 54°$ и $\sin 56°$ и указать погрешность результатов.

Таблица 2.5

Значения и разности функции $y = \sin x$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
30°	0,5000	736	—44	—5	45°	0,7071	589	—57	
35°	0,5736	692	—49	—5	50°	0,7660	532		
40°	0,6428	643	—54	—3	55°	0,8192			

Решение. Составив таблицу разностей (табл. 2.5), видим, что третьи разности практически постоянны. Поэтому в формуле (2.6) достаточно взять четыре члена.

Для вычисления $\sin 54°$ имеем

$$q = \frac{54° - 55°}{5°} = -0{,}2.$$

По формуле (2.6) получаем

$\sin 54^\circ = 0{,}8192 + (-0{,}2)\ 0{,}0532 -$

$$-\frac{(-0{,}2)\cdot 0{,}8}{2}\,0{,}0057 - \frac{(-0{,}2)\cdot 0{,}8\cdot 1{,}8}{6}\,0{,}0003 = 0{,}80903.$$

Остаточный член при $n=3$ имеет вид (см. формулу (2.7))

$$R_3(x) = h^4\,\frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!}\,f^{(4)}(\xi).$$

В нашем случае $h = 5^\circ = 0{,}0873$, $q = -0{,}2$, $f^{(4)}(\xi) = \sin\xi \leqslant 1$. Таким образом,

$$|R_3(54^\circ)| \leqslant \frac{(0{,}087)^4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 1{,}8\cdot 2{,}8}{24} \approx 0{,}2\cdot 10^{-5}.$$

Отсюда видно, что остаточный член может повлиять только на пятый десятичный знак; поэтому окончательный результат записываем в виде $\sin 54^\circ = 0{,}8090$. Полученное значение полностью совпадает с табличным.

Найдем теперь $\sin 56^\circ$. В этом случае

$$q = \frac{56^\circ - 55^\circ}{5^\circ} = 0{,}2,$$

и по (2.6) получаем

$\sin 56^\circ = 0{,}8192 + 0{,}2\cdot 0{,}0532 -$

$$-\frac{0{,}2\cdot 1{,}2}{2}\,0{,}0057 - \frac{0{,}2\cdot 1{,}2\cdot 2{,}2}{3!}\,0{,}0003 = 0{,}82913.$$

Остаточный член при $q = 0{,}2$, $h = 0{,}0873$ оценивается следующим образом:

$$|R_3(56^\circ)| \leqslant \frac{(0{,}087)^4\cdot 0{,}2\cdot 1{,}2\cdot 2{,}2\cdot 3{,}2}{24} \approx 0{,}4\cdot 10^{-5}.$$

Таким образом, остаточный член может повлиять лишь на пятый знак. Поэтому принимаем

$$\sin 56^\circ = 0{,}8291.$$

ЗАДАЧИ

1. Дана таблица значений функции $y = e^x$

x	e^x	x	e^x	x	e^x
0,50	1,6487	0,54	1,7160	0,58	1,7860
0,51	1,6653	0,55	1,7333	0,59	1,8040
0,52	1,6820	0,56	1,7507	0,60	1,8221
0,53	1,6989	0,57	1,7683		

Пользуясь формулой линейной интерполяции, вычислить e^x для следующих значений аргумента x и указать оценку остаточного члена R_1.

а) 0,507, б) 0,512, в) 0,523, г) 0,535, д) 0,541, е) 0,556, ж) 0,568, з) 0,571, и) 0,589, к) 0,594.

2. Дана таблица значений функции $y = \sin x$

x	$\sin x$	x	$\sin x$	x	$\sin x$
1,1	0,89121	1,6	0,99957	2,1	0,86321
1,2	0,93204	1,7	0,99166	2,2	0,80850
1,3	0,96356	1,8	0,97385	2,3	0,74571
1,4	0,98545	1,9	0,94630	2,4	0,67546
1,5	0,99749	2,0	0,90930	2,5	0,59847

Пользуясь первой или второй формулами Ньютона при $n = 2$ (квадратичная интерполяция), вычислить $\sin x$ для следующих значений аргумента x и указать оценку остаточного члена R_2.

а) 1,151, б) 1,218, в) 1,345, г) 1,421, д) 1,538, е) 1,609, ж) 1,732, з) 1,849, и) 1,929, к) 2,031, л) 2,173, м) 2,218, н) 2,313, о) 2,437, п) 2,478.

3. Дана таблица синусов с шагом 1°. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции R_1?

4. Дана таблица натуральных логарифмов чисел от 1 до 10. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции R_1, если шаг равен 0,001?

5. Таблица интеграла вероятности $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^x e^{-z^2}\,dz$ от $x = 0$ до $x = 3$ дана с шагом 0,001. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции R_1?

6. Функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ заданы табл. 2.6—2.8. Пользуясь первой или второй интерполяционными формулами, найти значения этих функций для указанных значений аргумента:

1) для функции $f(x)$

а) 1,50911, б) 1,50820, в) 1,50253, г) 1,50192, д) 1,59513, е) 1, 59575, ж) 1,59614, з) 1,59728;

2) для функции $g(x)$

а) 1,0113, б) 1,0219, в) 1,0321, г) 1,0428, д) 1,9592, е) 1,9675, ж) 1,9728, з) 1,9819;

3) для функции $h(x)$

а) 0,01928, б) 0,01392, в) 0,02475, г) 0,02713, д) 0,47113, е) 0,47531, ж) 0,48398, з) 0,48675.

Таблица 2.6

x	$f(x)$
1,50	0,51183
1,51	0,50624
1,52	0,50064
1,53	0,49503
1,54	0,48940
1,55	0,48376
1,56	0,47811
1,57	0,47245
1,58	0,46678
1,59	0,46110
1,60	0,45540

Таблица 2.7

x	$g(x)$
1,0	0,5652
1,1	0,6375
1,2	0,7147
1,3	0,7973
1,4	0,8861
1,5	0,9817
1,6	1,0848
1,7	1,1964
1,8	1,3172
1,9	1,4482
2,0	1,5906

Таблица 2.8

x	$h(x)$
0,00	0,28081
0,05	0,31270
0,10	0,34549
0,15	0,37904
0,20	0,41318
0,25	0,44774
0,30	0,48255
0,35	0,51745
0,40	0,55226
0,45	0,58682
0,50	0,62096

§ 3. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя

1. Интерполяционные формулы Гаусса. Первая интерполяционная формула Гаусса (для интерполирования вперед) имеет вид

$$P(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+$$
$$+\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}+\frac{(q+n-1)\ldots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}, \quad (3.1)$$

где $q=\frac{x-x_0}{h}$.

Разности Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}$, $\Delta^3 y_{-1}$, $\Delta^4 y_{-2}$, $\Delta^5 y_{-2}$, $\Delta^6 y_{-3}$, ..., используемые в этой формуле, образуют нижнюю ломаную линию в таблице разностей 3.1.

Вторая интерполяционная формула Гаусса (для интерполирования назад) записывается в виде

$$P(x)=y_0+q\Delta y_{-1}+\frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}+$$
$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\ldots+\frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-n}+$$
$$+\frac{(q+n)(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}, \quad (3.2)$$

где $q=\frac{x-x_0}{h}$.

Разности Δy_{-1}, $\Delta^2 y_{-1}$, $\Delta^3 y_{-2}$, $\Delta^4 y_{-2}$, $\Delta^5 y_{-3}$, $\Delta^6 y_{-3}$, ..., используемые в этой формуле, образуют верхнюю ломаную линию в таблице разностей 3.1. Остаточный член формул (3.1) и (3.2) может быть записан в виде (см. [1])

$$R_{2n}=\frac{h^{2n+1}f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots(q^2-n^2), \quad (3.3)$$

Таблица 3.1

Диагональная таблица разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-4}	y_{-4}						
		Δy_{-4}					
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$				
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$				
		Δy_3					
x_4	y_4						

где ξ — внутренняя точка промежутка, содержащего все узлы x_i ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$) и точку x.

Формулы Гаусса применяются для интерполирования в середине таблицы вблизи x_0. При этом первая формула Гаусса применяется при $x > x_0$, а вторая — при $x < x_0$.

Пример 3.1. Пользуясь таблицей значений функции

$$y = e^x$$

(табл. 3.2), найти $e^{1,13}$ и $e^{1,17}$.

Решение. Составляем таблицу разностей (табл. 3.2) и замечаем, что третьи разности практически постоянны. Поэтому в формулах (3.1) и (3.2) достаточно взять $n = 3$.

Для вычисления $e^{1,17}$ используем формулу (3.1) при $n = 3$ и $q = \frac{1,17 - 1,15}{0,05} = 0,4$:

$$e^{1,17} = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} =$$

$$= 3,1582 + 0,4 \cdot 0,1619 + \frac{0,4 \cdot (-0,6)}{2} 0,0079 + \frac{0,4 \cdot (-0,6) \cdot 1,4}{6} 0,0004 =$$

$$= 3,2220.$$

Для вычисления $e^{1,13}$ используем формулу (3.2) при $n=3$ и $q=\frac{1,13-1,15}{0,05}=-0,4$:

$$e^{1,13}=y_0+q\Delta y_{-1}+\frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}=3,1582-$$

$$-0,4\cdot 0,1540-\frac{0,6\cdot 0,4}{2}0,0079+\frac{0,6\cdot(-0,4)\cdot(-1,4)}{6}0,0004=3,0957.$$

Таблица 3.2

Значения и разности функции $y=e^x$

i	x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
—3	1,00	2,7183			
			1394		
—2	1,05	2,8577		71	
			1465		4
—1	1,10	3,0042		75	
			<u>1540</u>		<u>4</u>
0	1,15	<u>3,1582</u>		<u>79</u>	
			<u>1619</u>		<u>4</u>
1	1,20	3,3201		83	
			1702		5
2	1,25	3,4903		88	
			1790		
3	1,30	3,6693			

2. Интерполяционная формула Стирлинга. Эта формула представляет собой среднее арифметическое первой и второй формул Гаусса:

$$P(x)=y_0+q\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+\frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1}+\frac{q(q^2-1^2)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3}+\dots$$

$$\dots+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots[q^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n}+\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2}+$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)\dots[q^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}, \quad (3.4)$$

где $q=\frac{x-x_0}{h}$.

Остаточный член этой формулы имеет тот же вид (3.3).

Формула применяется для интерполирования в середине таблицы при значениях q, близких к нулю. Практически ее используют при $|q|\leqslant 0,25$.

Пример 3.2. По таблице значений функции $y = \operatorname{sh} x$ (табл. 3.3) найти $\operatorname{sh} 1,41710$.

Решение. Составляем таблицу разностей (табл. 3.3). Замечая, что четвертые разности практически постоянны, берем в формуле (3.4) $n = 4$:

$$y(x) = y_0 + q\,\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2}\,\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\,\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q^2-1)}{4!}\,\Delta^4 y_{-2}.$$

При $x = 1,41710$ имеем

$$q = \frac{1,41710 - 1,4}{0,1} = 0,1710.$$

Таким образом,

$$\operatorname{sh} 1,41710 = 1,90430 + 0,1710\,\frac{0,20592 + 0,22498}{2} + \frac{(0,1710)^2}{2}\,0,01906 + \frac{0,1710((0,1710)^2-1)}{3!}\,\frac{0,00206 + 0,00225}{2} + \frac{(0,1710)^2((0,1710)^2-1)}{4!}\,0,00019 =$$

$$= 1,90430 + 0,1710 \cdot 0.21545 + 0,01462 \cdot 0,01906 - 0,02767 \cdot 0,00215 - 0,00118 \cdot 0,00019 = 1,94136.$$

Сравнивая полученный результат с соответствующим значением функции $y = \operatorname{sh} x$, найденным по пятизначным таблицам, видим, что все цифры результата верные.

Таблица 3.3

Значения и разности функции $y = \operatorname{sh} x$

i	x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
—4	1,0	1,17520				
			16 045			
—3	1,1	1,33565		1336		
			17 381		175	
—2	1,2	1,50946		1511		14
			18 892		189	
—1	1,3	1,69838		1700		17
			20 592		206	
0	1,4	1,90430		1906		19
			22 498		225	
1	1,5	2,12928		2131		21
			24 629		246	
2	1,6	2,37557		2377		25
			27 006		271	
3	1,7	2,64563		2648		
			29 654			
4	1,8	2,94217				

3. Интерполяционная формула Бесселя. Эта формула имеет вид

$$P(x)=\frac{y_0+y_{-1}}{2}+\left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+$$
$$+\frac{(q-0,5)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}+$$
$$+\frac{(q-0,5)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+$$
$$+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!}\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+\dots$$
$$\dots+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!}\frac{\Delta^{2n} y_{-n}+\Delta^{2n} y_{-n+1}}{2}+$$
$$+\frac{(q-0,5)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n}, \quad (3.5)$$

где $q=\frac{x-x_0}{h}$.

Остаточный член можно записать в виде (см. [1], [14])

$$R_n(x)=\frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi)\,q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-n^2)(q-n-1), \quad (3.6)$$

где ξ лежит между x_0-nh и x_0+nh.

Формула Бесселя используется для интерполирования в середине таблицы при значениях q, близких к 0,5. Практически она используется при $0,25\leqslant q\leqslant 0,75$. Наиболее простой вид имеет формула при $q=0,5$, так как все члены, содержащие разности нечетного порядка, пропадают. Этот специальный случай формулы Бесселя называется *формулой интерполирования на середину*. Ее используют для уплотнения таблиц, т. е. для составления таблиц с более мелким шагом. Для остаточного члена при $q=0,5$ имеем (см. [14])

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}h^{2n+2}}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi)\frac{[1\cdot 3\cdot 5\dots(2n+1)]^2}{2^{2n+2}}. \quad (3.7)$$

Пример 3.3. Используя таблицу разностей функции $y=\operatorname{sh} x$ (табл. 3.3), найти $\operatorname{sh} 1,45224$.

Решение. Находим

$$q=\frac{1,45224-1,4}{0,1}=0,5224.$$

Так как q близко к 0,5, воспользуемся формулой Бесселя, взяв в ней пять членов:

$$y(x)=\frac{y_0+y_{-1}}{2}+(q-0,5)\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+$$
$$+\frac{(q-0,5)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}.$$

Вычислим отдельно выражения

$$\frac{q(q-1)}{2}=-0,12475,\quad \frac{(q-0,5)q(q-1)}{3!}=-0,00093,$$
$$\frac{q(q^2-1)(q-2)}{4!}=0,02339.$$

Окончательно находим

$$\operatorname{sh} 1,45224 = \frac{1,90430+2,12928}{2} + 0,0224 \cdot 0,22498 -$$
$$-0,12475 \cdot \frac{0,01906+0,02131}{2} - 0,00093 \cdot 0,00225 +$$
$$+0,02339 \cdot \frac{0,00019+0,00021}{2} = 2,01931.$$

Сравнив полученный результат с табличным, замечаем, что все цифры верные.

Заметим, что, как показывают рассмотренные примеры 3.1—3.3, слагаемые в интерполяционных формулах Гаусса, Бесселя и Стирлинга убывают значительно быстрее, чем в формулах Ньютона, и последнее слагаемое уже не влияет на точность результата.

ЗАДАЧИ

В задачах 1—3 использовать интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга или Бесселя.

1. Найти значения функции $f(x)$, заданной табл. 2.6, для следующих значений x:

а) 1,55031, б) 1,55193, в) 1,55232, г) 1,55381, д) 1,55482, е) 1,55568, ж) 1,55632, з) 1,55713, и) 1,55823, к) 1,55912, л) 1,54113, м) 1,54228, н) 1,54343, о) 1,54435, п) 1,54581, р) 1,54612, с) 1,54641, т) 1,54718, у) 1,54813, ф) 1,54921.

2. Найти значения функции $g(x)$, заданной табл. 2.7, для следующих значений x:

а) 1,5095, б) 1,5182, в) 1,5265, г) 1,5328, д) 1,5455, е) 1,5578, ж) 1,5728, з) 1,5823, и) 1,5919, к) 1,4095, л) 1,4128, м) 1,4213, н) 1,4318, о) 1,4424, п) 1,4583, р) 1,4619, с) 1,4724, т) 1,4843, у) 1,4921.

3. Найти значения функции $h(x)$, заданной табл. 2.8, для следующих значений x:

а) 0,25055, б) 0,25381, в) 0,26119, г) 0,26629, д) 0,26921, е) 0,27105, ж) 0,27321, з) 0,28472, и) 0,28731, к) 0,29214, л) 0,20931, м) 0,20835, н) 0,21413, о) 0,21618, п) 0,22392, р) 0,22692, с) 0,23321, т) 0,23719, у) 0,24182.

4. Используя формулу Бесселя, уплотнить таблицу значений функций $f(x)$ в два раза.

а)

x	$f(x)$
0,5	0,9384
0,6	0,9120
0,7	0,8812
0,8	0,8463
0,9	0,8075
1,0	0,7652
1,1	0,7196
1,2	0,6711
1,3	0,6201
1,4	0,5669
1,5	0,5118

б)

x	$f(x)$
1,0	1,2661
1,1	1,3262
1,2	1,3937
1,3	1,4693
1,4	1,5534
1,5	1,6467
1,6	1,7500
1,7	1,8640
1,8	1,9896
1,9	2,1277
2,0	2,2796

в)

x	$f(x)$
2,0	1,5906
2,1	1,7455
2,2	1,9141
2,3	2,0978
2,4	2,2981
2,5	2,5167
2,6	2,7554
2,7	3,0161
2,8	3,3011
2,9	3,6126
3,0	3,9534

§ 4. Интерполяционная формула Лагранжа. Схема Эйткена

Пусть x_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ — произвольные узлы, а $y_i=f(x_i)$ — значения функции $f(x)$. Многочленом степени n, принимающим в точках x_i значения y_i, является *интерполяционный многочлен Лагранжа* (см. [1], [11], [12], [58])

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \tag{4.1}$$

Остаточный член равен

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n), \tag{4.2}$$

где ξ есть некоторая точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ и точку x.

Выражения

$$L_i^{(n)}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \tag{4.3}$$

называются *коэффициентами Лагранжа.*

Для вычисления $L_i^{(n)}(x)$ удобно применить следующее расположение разностей, подчеркнув разности, расположенные на главной диагонали:

$$\left.\begin{array}{ccccc} \underline{x-x_0} & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \ldots & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & \underline{x-x_1} & x_1-x_2 & \ldots & x_1-x_n \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & \underline{x-x_2} & \ldots & x_2-x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & \ldots & \underline{x-x_n} \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

Обозначим произведение элементов i-й строки через D_i, а произведение элементов главной диагонали через $\Pi_{n+1}(x)$, т. е. $\Pi_{n+1}(x)= (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$. Тогда

$$L_i^{(n)}(x)=\frac{\Pi_{n+1}(x)}{D_i} \qquad (i=0, 1, \ldots, n). \tag{4.5}$$

Иногда бывает полезным для упрощения вычислений использовать инвариантность коэффициентов Лагранжа относительно линейной подстановки: если $x=at+b$, $x_j=at_j+b$ $(j=0, 1, \ldots, n)$, то

$$L_i^{(n)}(x)=L_i^{(n)}(t).$$

В случае равноотстоящих узлов имеются таблицы для лагранжевых коэффициентов и процесс вычисления значительно облегчается.

Если требуется найти не общее выражение $L_n(x)$, а лишь его значения при конкретных x и при этом значения функции даны в достаточно большом количестве узлов, то удобно пользоваться *интерполяционной схемой Эйткена* (см. [1]). Согласно этой схеме последовательно вычисляются многочлены

$$L_{i,\,i+1}(x)=\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i-x \\ y_{i+1} & x_{i+1}-x \end{vmatrix},$$

$$L_{i,\,i+1,\,i+2}(x)=\frac{1}{x_{i+2}-x_i}\begin{vmatrix} L_{i,\,i+1}(x) & x_i-x \\ L_{i+1,\,i+2}(x) & x_{i+2}-x \end{vmatrix},$$

$$L_{i,\,i+1,\,i+2,\,i+3}(x)=\frac{1}{x_{i+3}-x_i}\begin{vmatrix} L_{i,\,i+1,\,i+2}(x) & x_i-x \\ L_{i+1,\,i+2,\,i+3}(x) & x_{i+3}-x \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Интерполяционный многочлен n-й степени, принимающий в точках x_i значения y_i $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, запишется следующим образом:

$$L_{01\ldots n}(x)=\frac{1}{x_n-x_0}\begin{vmatrix} L_{01\ldots(n-1)}(x) & x_0-x \\ L_{12\ldots n}(x) & x_n-x \end{vmatrix}.$$

Вычисления по схеме Эйткена удобно расположить в такой таблице (табл. 4.1):

Таблица 4.1

Интерполяционная схема Эйткена

x_i	y_i	x_i-x	$L_{i-1,\,i}$	$L_{i-2,\,i-1,\,i}$	$L_{i-3,\,i-2,\,i-1,\,i}$	...
x_0	y_0	x_0-x				
x_1	y_1	x_1-x	$L_{01}(x)$			
x_2	y_2	x_2-x	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
x_3	y_3	x_3-x	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	...
x_4	y_4	x_4-x	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	...

Вычисления по схеме Эйткена обычно ведут до тех пор, пока последовательные значения $L_{01\ldots n}(x)$ и $L_{01\ldots n,\,(n+1)}(x)$ не совпадут в пределах заданной точности. Схема Эйткена легко реализуется на ЭВМ и обеспечивает возможность автоматического контроля точности вычислений.

Пример 4.1. Написать интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$, значения которой даны таблицей

i	0	1	2	3
x_i	0	0,1	0,3	0,5
y_i	—0,5	0	0,2	1

Решение. По формуле (4.3) при $n=3$ получим выражения $L_i^{(3)}(x)$ при $i=0, 2, 3$:

$$L_0^{(3)}(x)=\frac{(x-0{,}1)(x-0{,}3)(x-0{,}5)}{(-0{,}1)(-0{,}3)(-0{,}5)}=-\frac{x^3-0{,}9x^2+0{,}23x-0{,}015}{0{,}015},$$

$$L_2^{(3)}(x)=\frac{x(x-0,1)(x-0,5)}{0,3\cdot 0,2(-0,2)}=-\frac{x^3-0,6x^2+0,05x}{0,012},$$
$$L_3^{(3)}(x)=\frac{x(x-0,1)(x-0,3)}{0,5\cdot 0,4\cdot 0,2}=\frac{x^3-0,4x^2+0,03x}{0,04}$$

($L_1^{(3)}(x)$ в данном случае вычислять не следует, так как $y_1=0$).

Тогда искомый многочлен будет иметь вид

$$L_3(x)=L_0^{(3)}(x)\,y_0+L_1^{(3)}(x)\,y_1+L_2^{(3)}(x)\,y_2+L_3^{(3)}(x)\,y_3=$$
$$=\frac{125}{3}x^3-30x^2+\frac{73}{12}x-0,5.$$

Пример 4.2. Функция $y=f(x)$ задана таблицей

x	0,05	0,15	0,20	0,25	0,35	0,40	0,50	0,55
y	0,9512	0,8607	0,8187	0,7788	0,7047	0,6703	0,6065	0,5769

Найти $f(0,45)$.

Решение. Для упрощения вычислений полагаем

$$x=0,05\cdot t.$$

Тогда значения новой переменной t, соответствующие узлам интерполирования, будут 1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11. Кроме того, при $x=0,45$ будет $t=9$.

Воспользуемся инвариантностью лагранжевых коэффициентов и вместо $L_i^{(n)}(x)$ вычислим $L_i^{(n)}(t)$. Все вычисления расположим в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Вычисление лагранжевых коэффициентов

i	t_i-t_j $(i\neq j)$								D_i	y_i	$\frac{y_i}{D_i}$
0	8	−2	−3	−4	−6	−7	−8	−10	−725 760	0,9512	$-0,0131\cdot 10^{-4}$
1	2	6	−1	−2	−4	−5	−7	−8	26 880	0,8607	$0,3202\cdot 10^{-4}$
2	3	1	5	−1	−3	−4	−6	−7	−7 560	0,8187	$-1,0829\cdot 10^{-4}$
3	4	2	1	4	−2	−3	−5	−6	5 760	0,7788	$1,3520\cdot 10^{-4}$
4	6	4	3	2	2	−1	−3	−4	−3 456	0,7047	$-2,0390\cdot 10^{-4}$
5	7	5	4	3	1	1	−2	−3	2 520	0,6703	$2,6599\cdot 10^{-4}$
6	9	7	6	5	3	2	−1	−1	11 340	0,6065	$0,5348\cdot 10^{-4}$
7	10	8	7	6	4	3	1	−2	−80 640	0,5769	$-0,0715\cdot 10^{-4}$
$\Pi(t)=3840$									$S=\sum_{i=0}^{7}\frac{y_i}{D_i}=1,6604\cdot 10^{-4}$		

Таким образом, получаем

$$y(0{,}45)=\Pi(t)\sum_{i=0}^{7}\frac{y_i}{D_i}=\Pi(t)\cdot S=3840\cdot 1{,}6604\cdot 10^{-4}=0{,}6376.$$

Пример 4.3. С какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\ln 100{,}5$ по известным значениям $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$?

Решение. Остаточный член формулы Лагранжа при $n=3$ имеет вид

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

В нашем случае $x_0=100$, $x_1=101$, $x_2=102$, $x_3=103$, $x=100{,}5$; $100<\xi<103$. Так как $f(x)=\ln x$, то $f^{(4)}(x)=-6/x^4$. Таким образом,

$$|R_3(100{,}5)|\leqslant\frac{6}{(100)^4\cdot 4!}0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5=0{,}23\cdot 10^{-8}.$$

Пример 4.4. Функция $y=\sqrt[3]{x}$ задана таблицей

x	1,0	1,1	1,3	1,5	1,6
y	1,000	1,032	1,091	1,145	1,170

Применив схему Эйткена, найти $\sqrt[3]{1{,}15}$.

Решение. Записываем данные значения функции в табл. 4.3 и вычисляем разности x_i-x при $x=1{,}15$. Затем последовательно находим

$$L_{01}=\frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix}y_0 & x_0-x\\ y_1 & x_1-x\end{vmatrix}=\frac{1}{0{,}1}\begin{vmatrix}1 & -0{,}15\\ 1{,}032 & -0{,}05\end{vmatrix}=1{,}048,$$

$$L_{12}=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix}y_1 & x_1-x\\ y_2 & x_2-x\end{vmatrix}=\frac{1}{0{,}2}\begin{vmatrix}1{,}032 & -0{,}05\\ 1{,}091 & 0{,}15\end{vmatrix}=1{,}047,$$

$$L_{23}=\frac{1}{x_3-x_2}\begin{vmatrix}y_2 & x_2-x\\ y_3 & x_3-x\end{vmatrix}=\frac{1}{0{,}2}\begin{vmatrix}1{,}091 & 0{,}15\\ 1{,}145 & 0{,}35\end{vmatrix}=1{,}050,$$

$$L_{34}=\frac{1}{x_4-x_3}\begin{vmatrix}y_3 & x_3-x\\ y_4 & x_4-x\end{vmatrix}=\frac{1}{0{,}1}\begin{vmatrix}1{,}145 & 0{,}35\\ 1{,}170 & 0{,}45\end{vmatrix}=1{,}057.$$

Таблица 4.3

Схема Эйткена для примера 4.4

i	x	y	x_i-x	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	i	x	y	x_i-x	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$
0	1,0	1,000	−0,15			3	1,5	1,145	0,35	1,050	
1	1,1	1,032	−0,05	1,048		4	1,6	1,170	0,45	1,057	
2	1,3	1,091	0,15	1,047	1,048						

Полученные значения $L_{i-1,i}$ заносим в табл. 4.3, после чего вычисляем

$$L_{012}=\frac{1}{0,3}\begin{vmatrix}1,048 & -0,15\\ 1,047 & 0,15\end{vmatrix}=1,048.$$

Значения L_{01} и L_{012} совпадают до третьего знака. На этом вычисления можно прекратить и с точностью до 10^{-3} записать

$$\sqrt[3]{1,15}=1,048.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти многочлен наименьшей степени, принимающий в данных точках заданные значения:

а)

x	y
1,45	3,14
1,36	4,15
1,14	5,65

б)

x	y
0	2
1	3
2	12
5	147

в)

x	y
0	1,45
1,5	3,14
3,4	4,65
6,8	4,11

г)

x	y
11	1342
13	2210
14	2758
18	5850
19	6878
21	9282

д)

x	y
—2	25
1	—8
2	—15
4	—23

е)

x	y
—2	6
—1	0
0	2
1	0
2	6

2. Дана таблица значений функции

x	1,50	1,54	1,56	1,60	1,63	1,70
y	3,873	3,924	3,950	4,000	4,037	4,123

Пользуясь формулой Лагранжа, найти значения функции в указанных точках:

а) 1,52, б) 1,55, в) 1,58, г) 1,61, д) 1,67.

3. Дана таблица значений функции

x	2,0	2,3	2,5	3,0	3,5	3,8	4,0
y	5,848	6,127	6,300	6,694	7,047	7,243	7,368

Пользуясь формулой Лагранжа, найти значения функции в указанных точках:

а) 2,22, б) 2,41, в) 2,78, г) 3,34, д) 3,75, е) 3,88.

4. Зная значения $\sin x$ при $x=0$, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, найти $\sin x$ при $x=\pi/12$ и оценить погрешность.

5. Зная значения $\cos x$ при $x=0$, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, найти $\cos x$ при $x=\pi/5$ и оценить погрешность.

6. Используя схему Эйткена, найти значения функций, заданных таблицей, в заданных точках.

а)

x	14	17	31	35
y	68,7	64,0	44,0	39,1

Найти y (27).

б)

x	93,0	96,2	100,0	104,2	108,7
y	11,38	12,80	14,70	17,07	19,91

Найти y (102).

в)

x	0	2	3	6	7	9
y	658 503	704 969	729 000	804 357	830 584	884 736

Найти y(5).

7. Функция $f(x)$ дана таблицей

x	1,00	1,08	1,13	1,20	1,27	1,31	1,38
$f(x)$	1,17520	1,30254	1,38631	1,50946	1,21730	1,22361	1,23470

Пользуясь интерполяционной схемой Эйткена, вычислить с точностью до 10^{-5} значения этой функции для следующих значений x:

а) 1,134, б) 1,139, в) 1,143, г) 1,151, д) 1,166, е) 1,175, ж) 1,182, з) 1,197, и) 1,185, к) 1,192, л) 1,195, м) 1,178.

§ 5. Обратное интерполирование

Пусть функция $y=f(x)$ задана таблицей.

Задача обратного интерполирования заключается в том, чтобы по заданному значению функции y определить соответствующее значение аргумента x. Мы будем считать, что в рассматриваемом интервале функция $f(x)$ монотонна, так что поставленная задача имеет единственное решение. В этом случае задача решается с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа. Для этого достаточно принять переменную y за независимую, а x считать функцией от y. Тогда, написав по заданным узлам (y_i, x_i) $(i=0, 1, \ldots, n)$ многочлен Лагранжа

$$x=\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})\ldots(y-y_n)}{(y_i-y_0)(y_i-y_1)\ldots(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})\ldots(y_i-y_n)}, \qquad (5.1)$$

можно определить x по заданному y. Остаточный член в этом случае можно получить из остаточного члена формулы Лагранжа, меняя местами x и y.

Пример 5.1. Функция $y=f(x)$ задана таблицей

x	10	15	17	20
y	3	7	11	17

Найти значение x, для которого $y=10$.

Решение. Интерполяционный многочлен Лагранжа в данном случае имеет вид

$$x(y)=\sum_{i=0}^{3} x_i L_i^{(3)}(y),$$

где $L_i^{(3)}(y)$ — лагранжевы коэффициенты.

При $y=10$ получаем

$$x(10)=10\frac{(10-7)(10-11)(10-17)}{(3-7)(3-11)(3-17)}+15\frac{(10-3)(10-11)(10-17)}{(7-3)(7-11)(7-17)}+$$
$$+17\frac{(10-3)(10-7)(10-17)}{(11-3)(11-7)(11-17)}+20\frac{(10-3)(10-7)(10-11)}{(17-3)(17-7)(17-11)}=$$
$$=-\frac{15}{32}+\frac{147}{32}+\frac{17\cdot 49}{64}-\frac{1}{2}=\frac{33}{8}+\frac{833}{64}-\frac{1}{2}=16{,}641.$$

Заметим, однако, что здесь значительно удобнее схема Эйткена (см. § 4).

Итерационные методы. Если функция $y=f(x)$ задана таблицей с равноотстоящими узлами, то записываем для нее один из интерполяционных многочленов, например первый интерполяционный многочлен Ньютона:

$$y=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!}q+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1)+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1)\ldots(q-n+1). \quad (5.2)$$

Рассматривая последнее выражение как уравнение относительно q, находим q по заданному значению y, а затем вычисляем

$$x=x_0+qh.$$

Если число узлов велико, то получим алгебраическое уравнение высокой степени. При решении такого уравнения удобно применить метод итераций. Для этого запишем уравнение (5.2) в виде

$$q=\varphi(q)=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}-\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,\Delta y_0}q(q-1)-\ldots-\frac{\Delta^n y_0}{n!\,\Delta y_0}q(q-1)\ldots(q-n+1).$$

За начальное приближение принимаем

$$q_0=\frac{y-y_0}{\Delta y_0},$$

а затем применяем процесс итераций

$$q_m=\varphi(q_{m-1}).$$

В большинстве случаев при достаточно малом шаге $h=x_{i+1}-x_i$ процесс итераций сходится; при этом он сходится к искомому корню, т. е.

$$q=\lim_{m\to\infty} q_m.$$

Условием сходимости является выполнение неравенства $|\varphi'(q)|\leqslant\alpha<1$. На практике итерации продолжают до тех пор, пока два последовательных значения q_m и q_{m+1} не совпадут с заданной точностью, и полагают $q\approx q_{m+1}$.

Замечание. Указанный метод итераций для обратной интерполяции требует монотонности функции $f(x)$ только на интервале (x_0, x_1), где $y_0<y<y_1$ или $y_0>y>y_1$. Узлы же применяемой интерполяционной формулы могут лежать и вне интервала монотонности функции $f(x)$.

Пример 5.2. Используя таблицу значений функции $y=\operatorname{sh} x$ (см. табл. 5.1), найти x, при котором $\operatorname{sh} x=5$.

Таблица 5.1

Значения функции $y=\operatorname{sh} x$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2,2	4,457	1,009	0,220	0,054
2,4	5,466	1,229	0,274	0,043
2,6	6,695	1,503	0,317	
2,8	8,198	1,820		
3,0	10,018			

Решение. Составляем первый интерполяционный многочлен Ньютона, останавливаясь на разностях третьего порядка, которые практически уже постоянны:

$$y=y_0+\Delta y_0 q+\frac{\Delta^2 y_0}{2}q(q-1)+\frac{\Delta^3 y_0}{6}q(q-1)(q-2).$$

Полагаем $x_0=2{,}2$, так как заданное значение $y=5$ находится между $y_0=4{,}457$ и $y_1=5{,}466$.

В нашем случае итерирующая функция имеет вид

$$\varphi(q)=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}-\frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta y_0}q(q-1)-\frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta y_0}q(q-1)(q-2).$$

Принимая $y_0=4{,}457$, определяем начальное приближение

$$q_0=\frac{5-4{,}457}{1{,}009}=\frac{0{,}543}{1{,}009}=0{,}538.$$

Затем последовательно находим

$$q_1=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}-\frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta y_0}q_0(q_0-1)-\frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta y_0}q_0(q_0-1)(q_0-2)=$$

$$=0{,}538+\frac{0{,}538\cdot 0{,}462}{2}\cdot\frac{0{,}220}{1{,}009}-\frac{0{,}538\cdot 0{,}462\cdot 1{,}462}{6}\cdot\frac{0{,}054}{1{,}009}=0{,}5641,$$

$$q_2=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}-\frac{\Delta^2 y_0}{2\Delta y_0}q_1(q_1-1)-\frac{\Delta^3 y_0}{6\Delta y_0}q_1(q_1-1)(q_1-2)=$$

$$=0{,}538+\frac{0{,}5644\cdot 0{,}4356}{2}\cdot\frac{0{,}220}{1{,}009}-\frac{0{,}5644\cdot 0{,}4356\cdot 1{,}4356}{6}\cdot\frac{0{,}054}{1{,}009}=0{,}5644.$$

Таким образом, мы можем принять $q=0{,}564$ и

$$x=2{,}2+0{,}564\cdot 0{,}2=2{,}2,+0{,}113=2{,}313$$

с точностью до 0,001.

Пример 5.3. Дана таблица значений интеграла вероятностей (табл. 5.2)

$$y=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}\,dz.$$

Определить значение x, при котором интеграл равен 1/2.

Таблица 5.2

Интеграл вероятностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,45	0,4754818				
		91 737			
0,46	0,4846555		—840		
		90 897		—11	
0,47	0,4937452		—851		1
		90 046		—10	
0,48	0,5027498		—861		2
		89 185		—8	
0,49	0,5116683		—869		
		88 316			
0,50	0,5204999				

Решение. Для аргумента x ближайшим меньшим табличным значением, соответствующим значению функции $y=1/2$, является

$x_0=0{,}47$. Поэтому здесь удобно применить формулу Бесселя

$$y=\frac{y_0+y_1}{2}+\left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+$$
$$+\frac{(q-{}^1/_2)\,q\,(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}. \quad (5.3)$$

В нашем случае $x_0=0{,}47$, $h=0{,}01$, $y=0{,}5$.

Для удобства вычислений обозначим $p=q-0{,}5$, откуда $q=p+0{,}5$. Тогда формула (5.3) примет вид

$$0{,}5=\frac{y_0+y_1}{2}+p\,\Delta y_0+\frac{p^2-0{,}25}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{p\,(p^2-0{,}25)}{3!}\Delta^3 y_{-1}.$$

Выделяя член, содержащий p, получим

$$p=\frac{1}{\Delta y_0}\left(-\frac{y_0+y_1}{2}+0{,}5\right)-\frac{p^2-0{,}25}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2\Delta y_0}-$$
$$-\frac{p\,(p^2-0{,}25)}{6}\frac{\Delta^3 y_{-1}}{\Delta y_0}=\varphi(p).$$

В качестве начального приближения возьмем

$$p_0=\frac{1}{\Delta y_0}\left(0{,}5-\frac{y_0+y_1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{0{,}0090046}\left(0{,}5-\frac{0{,}4937452+0{,}5027448}{2}\right)=0{,}194623.$$

Затем последовательно находим

$$p_1=p_0-\frac{p_0^2-0{,}25}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2\Delta y_0}-\frac{p_0\,(p_0^2-0{,}25)}{6}\frac{\Delta^3 y_{-1}}{\Delta y_0}=$$
$$=0{,}194623+4{,}753\cdot 10^{-3}\,[(0{,}194623)^2-0{,}25]+$$
$$+1{,}85\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}194623\,[(0{,}194623)^2-0{,}25]\cdot(-0{,}0000185)=$$
$$=0{,}194623-0{,}00108-0{,}000001=0{,}193614,$$

$$p_2=p_0-\frac{p_1^2-0{,}25}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2\Delta y_0}-\frac{p_1\,(p_1^2-0{,}25)}{6}\frac{\Delta^3 y_{-1}}{\Delta y_0}=0{,}193612.$$

Таким образом, с точностью до пяти знаков можем написать

$$p\approx 0{,}19361,$$

откуда

$$q=p+0{,}5=0{,}69361, \qquad x=x_0+qh=0{,}4769361.$$

Искомое значение x определено с семью верными знаками.

ЗАДАЧИ

1. По данным таблицам значений функций определить значение аргумента x, соответствующее указанным значениям y.

а)

x	1	2	2,5	3
y	—6	—1	5,625	16

, $y=0$,

б)

x	4	6	8	10
y	11	27	50	83

, $y=20$.

В задачах 2—4 даны таблицы значений монотонных функций. Применяя один из рассмотренных способов обратного интерполирования, найти значения x, соответствующие указанным значениям y.

2.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
y	2,00000	2,00238	2,00909	2,01957	2,03313	2,05000

а) 2,00139, б) 2,00194, в) 2,00373, г) 2,00484, д) 2,01147, е) 2,01452, ж) 2,02259, з) 2,02888, и) 2,03805, к) 2,04610.

3.

x	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
y	2,25000	2,12068	2,02667	1,96096	1,91857

а) 2,18038, б) 2,14111, в) 2,08318, г) 2,04815, д) 1,99327, е) 1,98295, ж) 1,94323, з) 1,93379.

4.

x	1,00	1,10	1,15	1,20	1,23	1,30
y	1,36788	1,24196	1,18621	1,13452	1,10530	1,04176

а) 1,27153, б) 1,21577, в) 1,19919, г) 1,17661, д) 1,15988, е) 1,11684, ж) 1,11461, з) 1,08836, и) 1,06913.

В задачах 5—7 даны таблицы значений немонотонных функций. Применяя одну из интерполяционных формул, найти значения x, соответствующие указанным значениям y.

5.

x	0,05	0,10	0,15	0,20
y	0,52943	0,94147	1,14749	1,10930

а) 0,57769, б) 0,81315, в) 1,06549.

6.

x	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
y	0,91909	0,89207	0,87333	0,86250	0,85923	0,86324

а) 0,91124, б) 0,89777, в) 0,88479, г) 0,87484, д) 0,86784, е) 0,86371.

7.

x	0,05	0,10	0,15	0,20
y	0,48193	0,85147	1,01999	0,94930

а) 0,73787, б) 0,79778, в) 0,91718.

§ 6. Нахождение корней уравнения методом обратного интерполирования

Пусть требуется решить уравнение

$$f(x)=0.$$

Рассмотрим функцию $y=f(x)$ и составим таблицу ее значений, близких к нулю. При этом количество узлов выбираем в зависимости от требуемой точности корня. В качестве x_0 и x_1 берем те соседние узлы, в которых

$$f(x_0)f(x_1)<0,$$

и применяя метод обратного интерполирования, отыскиваем значение x, при котором $y=0$. Здесь тоже удобнее всего проводить расчеты по схеме Эйткена.

Пример 6.1. Решить уравнение

$$e^{-x}-x=0.$$

Решение. Это уравнение имеет, очевидно, только один корень, причем этот корень лежит в интервале (0,5; 0,7). Составим таблицу значений функции $y=e^{-x}-x$ с шагом 0,05 в указанном интервале:

x	e^{-x}	$y=e^{-x}-x$	x	e^{-x}	$y=e^{-x}-x$
0,50	0,60653	0,10653	0,65	0,52205	—0,12795
0,55	0,57695	0,02695	0,70	0,49658	—0,20342
0,60	0,54881	—0,05119			

Из таблицы видно, что y меняет знак при переходе от точки $x=0{,}55$ к точке $x=0{,}60$. Полагаем $x_0=0{,}55$, $x_1=0{,}60$ и проводим расчет по схеме Эйткена.

Расчеты представлены в следующей таблице:

i	$y_i=e^{-x_i}-x_i$	$0-y_i$	x_i	$P_{0,i}(0)$	$P_{0,1,i}(0)$
0	0,02695	—0,02695	0,55		
1	—0,05119	0,05119	0,60	0,567245	
2	0,10653	—0,10653	0,50	0,566933	0,567144
3	—0,12795	0,12795	0,65	0,567398	0,567142

В последних двух приближенных значениях корня 0,567144 и 0,567142 совпадают знаки во всех разрядах до 10^{-5}. Поэтому можно считать, что решением уравнения является $x=0{,}56714$ с погрешностью не более 10^{-5}.

ЗАДАЧИ

В задачах 1—15 с помощью обратного интерполирования найти с указанной точностью ε корень уравнения, лежащий на отрезке $[a, b]$.

1. $x^2+\ln x=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $a=0{,}5$, $b=1$.
2. $x^2-\lg(x+2)=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $a=0{,}5$, $b=1$.
3. $x^2+\ln x-4=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $a=1{,}5$, $b=2$.
4. $(x-1)^2-0{,}5e^x=0$, $\varepsilon=10^{-5}$, $a=0{,}2$, $b=0{,}3$.
5. $(x-1)^2-e^{-x}=0$, $\varepsilon=10^{-5}$, $a=1{,}4$, $b=1{,}5$.
6. $x^3-\sin x=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $a=0$, $b=1$.
7. $4x-\cos x=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $a=0$, $b=0{,}5$.
8. $x^2-\sin x=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $a=0{,}5$, $b=1$.
9. $x-\cos x=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $a=0{,}5$, $b=1$.
10. $x^2-\cos \pi x=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $a=0$, $b=0{,}5$.
11. $2\sqrt{x}-\cos(\pi x/2)=0$, $\varepsilon=10^{-5}$, $a=0{,}2$, $b=0{,}3$.
12. $\sqrt{x}-2\cos(\pi x/2)=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $a=0{,}7$, $b=0{,}8$.
13. $x^2-\operatorname{ctg}(\pi x/3)=0$, $\varepsilon=10^{-5}$, $a=0{,}8$, $b=0{,}9$.
14. $x^2-\cos^2 \pi x=0$, $\varepsilon=10^{-5}$, $a=0{,}3$, $b=0{,}4$.
15. $x^2-\sin \pi x=0$, $\varepsilon=10^{-4}$, $a=0{,}75$, $b=0{,}85$.

16. Найти с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} mx-ax=0$ при следующих значениях параметров:

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
a	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6

17. Найти с точностью до 10^{-4} наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{ctg} mx - ax = 0$$

при следующих значениях параметров:

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
a	2	3	4	5	2	3	4	5	6	7

18. Найти с точностью до 10^{-4} наименьший положительный корень уравнения

$$\sin kx - bx = 0$$

при следующих значениях параметров:

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	2,0	2,1
k	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3

В задачах 19—27 с точностью до 10^{-4} найти корни алгебраических уравнений, лежащие на отрезке $[a, b]$.

19. $x^4 + 3x^3 - 9x - 9 = 0$, $a = 1$, $b = 2$.

20. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0$, $a = -1$, $b = 0$.

21. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 3 = 0$, $a = 0$, $b = 1$.

22. $x^4 - 10x^2 - 16x + 5 = 0$, $a = 0$, $b = 1$.

23. $x^4 - x^3 - 9x^2 + 10x - 10 = 0$, $a = -4$, $b = -3$.

24. $x^4 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$, $a = 1$, $b = 2$.

25. $x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$, $a = -3$, $b = -2$.

26. $x^4 - x^3 - 7x^2 - 8x - 6 = 0$, $a = 3$, $b = 4$.

27. $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2 = 0$, $a = 1$, $b = 2$.

ГЛАВА VI

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 1. Формулы численного дифференцирования

Приводимые ниже формулы численного дифференцирования применяются в тех случаях, когда функция $y=f(x)$ задана таблицей своих значений $y_i=f(x_i)$ в равноотстоящих узлах $x_i=x_0+ih$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Выбрав какое-нибудь множество $n+1$ узлов, заменим функцию $y=f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$. Тогда производная от этого многочлена $P'_n(x)$ применяется для приближенного представления искомой производной $y'=f'(x)$:

$$f'(x) \approx P'_n(x).$$

Например, если выбрать узлы x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 и воспользоваться первым интерполяционным многочленом Ньютона (см. гл. V, § 2), то мы получим формулу численного дифференцирования вида

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0+\frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0\right), \tag{1.1}$$

где $q=\dfrac{x-x_0}{h}$.

Если же выбрать узлы x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2 и воспользоваться интерполяционным многочленом Стирлинга (см. гл. V, § 3), то мы получим

$$f'(x) \approx$$
$$\approx \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+q\Delta^2 y_{-1}+\frac{3q^2-1}{6}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{2q^3-q}{12}\Delta^4 y_{-2}\right), \tag{1.2}$$

где $q=\dfrac{x-x_0}{h}$.

Обычно формулы численного дифференцирования применяют для нахождения производных в узлах x_i. Так как при этом любую точку можно принять за начальную, то формулы записывают для точки x_0. Это равносильно подстановке значения $q=0$ в формулу вида (1.1) или (1.2). При этом дифференцирование интерполяционных многочленов Ньютона приводит к формулам

$$y'_0=f'(x_0)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta^n y_0\right), \tag{1.3}$$

$$y'_0=f'(x_0)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_{-1}+\frac{1}{2}\Delta^2 y_{-2}+\frac{1}{3}\Delta^3 y_{-3}+\ldots+\frac{1}{n}\Delta^n y_{-n}\right). \tag{1.4}$$

Первая из этих формул применяется только для начальных строк таблицы, вторая — для последних строк. В середине таблицы обычно применяется формула численного дифференцирования, получающаяся путем дифференцирования интерполяционного многочлена Стирлинга:

$$y'_0=f'(x_0)\approx\frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}-\frac{1}{6}\,\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{1}{30}\,\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+\ldots\right). \tag{1.5}$$

Эта формула более удобна для расчетов и имеет более высокую точность, чем формулы (1.3) и (1.4).

Заметим, что применение формул (1.3)—(1.5) предполагает определенную правильность в поведении конечных разностей (см. примеры 1.1 и 1.2). Случаи нарушения правильности таблицы разностей требуют каждый раз специального исследования поведения функции.

В некоторых случаях (например, при работе на ЭВМ) удобнее выражать производные не через конечные разности функции, а непосредственно через данные значения функции. Выпишем наиболее употребительные из таких формул.

Сохраняя в формуле (1.5) только первый член, получим

$$y'_0\approx\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2h}=\frac{y_1-y_{-1}}{2h}. \tag{1.6}$$

Сохраняя в той же формуле два первых члена, получим

$$y'_0=\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2h}-\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{12h}=\frac{y_{-2}-8y_{-1}+8y_1-y_2}{12h}. \tag{1.7}$$

Аналогично из формулы (1.3) получаем

$$\left.\begin{aligned}
y'_0&\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0\right)=\frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h},\\
y'_0&\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0\right)=\frac{-11y_0+18y_1-9y_2+2y_3}{6h},\\
y'_0&\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0\right)=\\
&\qquad=\frac{-25y_0+48y_1-36y_2+16y_3-3y_4}{12h}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Приближенные формулы для вычисления производных второго порядка получаются путем двукратного дифференцирования интерполяционных многочленов. Так, дифференцируя дважды интерполяционный многочлен Стирлинга (при $q=0$), получаем

$$y_0''=f''(x_0)\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2y_{-1}-\frac{1}{12}\Delta^4y_{-2}+\frac{1}{90}\Delta^6y_{-4}+\ldots\right). \quad (1.9)$$

В начале и в конце таблицы пользуются формулами, которые получаются из интерполяционных многочленов Ньютона:

$$y_0''=f''(x_0)\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2y_0-\Delta^3y_0+\frac{11}{12}\Delta^4y_0-\frac{5}{6}\Delta^5y_0+\ldots\right), \quad (1.10)$$

$$y_0''=f''(x_0)\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2y_{-2}+\Delta^3y_{-3}+\frac{11}{12}\Delta^4y_{-4}+\frac{5}{6}\Delta^5y_{-5}+\ldots\right). \quad (1.11)$$

Эти формулы менее удобны для расчетов и имеют меньшую точность, чем формула (1.9).

При повторном дифференцировании тоже иногда применяются формулы, выражающие производную второго порядка непосредственно через данные значения функции. Мы ограничимся приведением лишь одной наиболее употребительной формулы такого вида:

$$y_0''\approx\frac{\Delta^2y_{-1}}{h^2}=\frac{y_{-1}-2y_0+y_1}{h^2}. \quad (1.12)$$

Заметим, что с ростом порядка производной обычно резко падает точность численного дифференцирования. Поэтому на практике редко применяют формулы численного дифференцирования для производных выше второго порядка.

Таблица 1.1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,00	0,00000				
		10 017			
0,05	0,10017		100		
		10 117		101	
0,10	0,20134		201		3
		10 318		104	
0,15	0,30452		305		3
		10 623		107	
0,20	0,41075		412		
		11 035			
0,25	0,52110				

Пример 1.1. В первых двух столбцах табл. 1.1 даны значения функции $y=\operatorname{sh}2x$ с шагом $h=0{,}05$. Найти значения производных y' и y'' в точках $x=0{,}0$ и $x=0{,}1$.

Решение. Составляем таблицу разностей (см. табл. 1.1). Эту таблицу продолжаем только до разностей четвертого порядка, так как разности более высоких порядков при выбранном шаге практически равны нулю. Для численного дифференцирования в точке $x=0{,}0$ используем формулы (1.3) и (1.10), считая $x_0=0{,}0$:

$$y'|_{x=0,0}\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2y_0+\frac{1}{3}\Delta^3y_0-\frac{1}{4}\Delta^4y_0\right)=$$
$$=20\,(0{,}10017-0{,}00050+0{,}00034-0{,}00001)=2{,}0000,$$

$$y''|_{x=0,0}\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2y_0-\Delta^3y_0+\frac{11}{12}\Delta^4y_0\right)=$$
$$=400\,(0{,}00100-0{,}00101+0{,}00003)=0{,}008.$$

Для численного дифференцирования в точке $x=0{,}1$ используем формулы (1.5) и (1.9), считая $x_0=0{,}1$:

$$y'|_{x=0,1} \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}-\frac{1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}\right)=$$
$$=20\,(0{,}10217-0{,}00017)=2{,}0400,$$

$$y''|_{x=0,1} \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}-\frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2}\right)=400\,(0{,}00201-0{,}00000)=0{,}804.$$

Для сравнения приведем точные значения производных $y'=2\operatorname{ch}2x$, $y''=4\operatorname{sh}2x$ в рассматриваемых точках: $y'=2$, $y''=0$ при $x=0{,}0$; $y'=2\operatorname{ch}0{,}2=2{,}0401$, $y''=4\operatorname{sh}0{,}2=0{,}8052$ при $x=0{,}1$.

Пример 1.2. Табл. 1.2 представляет часть семизначных таблиц функции Бесселя $y=J_0(x)$ с шагом $h=0{,}02$.

Таблица 1.2

x	0,96	0,98	1,00	1,02	1,04
y	0,7825361	0,7739332	0,7651977	0,7563321	0,7473390

Вычислить производные y' и y'' в точке $x_0=1{,}00$, если известно, что при таком шаге (вблизи точки $x=1{,}00$) можно пренебречь разностями выше третьего порядка.

Решение. Так как в условии задачи сказано, что можно пренебречь разностями порядка выше третьего, то воспользуемся формулами (1.7) и (1.12):

$$y'|_{x=1,00} \approx \frac{0{,}7825361-8\cdot 0{,}7739332+8\cdot 0{,}7563321-0{,}7473390}{12\cdot 0{,}02}=$$
$$=\frac{0{,}0351971-8\cdot 0{,}0176011}{0{,}24}=-0{,}440049,$$

$$y''|_{x=1,00} \approx \frac{0{,}7739332-2\cdot 0{,}7651977+0{,}7563321}{0{,}02^2}=\frac{-0{,}0001301}{0{,}0004}=-0{,}3252.$$

Для сравнения приведем точные значения производных $y'=-J_1(x)$, $y''=J_1(x)-J_0(x)$ в рассматриваемой точке: $y'=-0{,}4400506$, $y''=-0{,}3251471$ при $x=1{,}00$.

ЗАДАЧИ

1. Дана таблица значений функции $y=f(x)$ (табл. 1.3).

а) Составить таблицу значений производной y' в точках $x=1{,}2+0{,}1\cdot k$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 16)$.

б) Составить таблицу значений производной второго порядка y'' в точках $x=1{,}2+0{,}1\cdot k$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 16)$.

Таблица 1.3

x	y	x	y	x	y
1,0	1,2661	1,7	1,8640	2,4	3,0493
1,1	1,3262	1,8	1,9896	2,5	3,2898
1,2	1,3937	1,9	2,1277	2,6	3,5533
1,3	1,4693	2,0	2,2796	2,7	3,8417
1,4	1,5534	2,1	2,4463	2,8	4,1573
1,5	1,6467	2,2	2,6291	2,9	4,5027
1,6	1,7500	2,3	2,8296	3,0	4,8808

в) С помощью интерполяционных формул Ньютона найти значения производной y' в точках $x=1{,}0$; $1{,}1$; $2{,}9$; $3{,}0$.

г) Найти значения производной y'' в точках $x=1{,}0$, $x=3{,}0$.

2. Дана таблица значений функции $y=f(x)$ (табл. 1.4).

Таблица 1.4

x	y	x	y	x	y
0,4	0,4000	1,6	8,7826	2,8	23,3808
0,6	1,4848	1,8	10,6967	3,0	26,6819
0,8	2,6811	2,0	12,7945	3,2	30,2945
1,0	3,9983	2,2	15,0926	3,4	34,2479
1,2	5,4465	2,4	17,6093	3,6	38,5741
1,4	7,0371	2,6	20,3647	3,8	43,3084

а) Составить таблицу значений производной y' в точках $x=0{,}8+0{,}2\cdot k$ $(k=0, 1, \ldots, 13)$.

б) Составить таблицу значений производной второго порядка y'' в точках $x=0{,}8+0{,}2\cdot k$ $(k=0, 1, \ldots, 13)$.

в) С помощью интерполяционных формул Ньютона найти значения производной y' в точках $x=0{,}4$; $0{,}6$; $3{,}6$; $3{,}8$.

г) Найти значения производной y'' в точках $x=0{,}4$; $0{,}6$; $3{,}6$; $3{,}8$.

§ 2. Погрешности, возникающие при численном дифференцировании

При численном дифференцировании таблично заданной функции $y=f(x)$ возникают погрешности двух типов:

а) *погрешности усечения*, которые вызываются заменой функции $f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$;

б) *погрешности округления*, которые вызываются неточным заданием исходных значений y_i.

Погрешности усечения для формул (1.3) и (1.4) оцениваются величиной $\frac{1}{n+1}h^n\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$, где ξ лежит в интервале (x_0, x_n) или (x_{-n}, x_0) соответственно. Эта оценка мало пригодна, так как обычно мы ничего не знаем даже о порядке величины $f^{(n+1)}(x)$. На практике для оценки погрешности усечения пользуются следующими соображениями.

Предполагают, что рассматриваемая функция $f(x)$ не имеет быстро колеблющихся составляющих (т. е. составляющих, период которых не превосходит величины шага h). При этом условии малость величины разностей определенного порядка свидетельствует о достаточно хорошем приближении функции $f(x)$ интерполяционным многочленом подходящей степени. Если разности порядка m различаются меньше чем на величину погрешности их округления (см. табл. 2.1), то считают, что эти разности практически постоянны. Разности более высоких порядков в формулах численного дифференцирования не применяют. При этом считают, что погрешность усечения не превосходит единицы младшего разряда значений y_i, деленной на h. Если же, как это часто делают, формулу обрывают раньше, чем указано выше, то отброшенные члены служат для оценки погрешности округления. Например, если разности третьего порядка изменяются достаточно плавно, то погрешность усечения формулы (1.6) приближенно оценивается величиной $\frac{1}{6h}\frac{|\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}|}{2}$; если разности четвертого порядка изменяются достаточно плавно, то погрешность усечения формулы (1.12) приближенно оценивается величиной $\frac{1}{12h^2}|\Delta^4 y_{-2}|$.

Заметим, что все формулы оценки погрешности усечения содержат шаг расчета h в положительной степени, поэтому при уменьшении шага h погрешность усечения, как правило, *уменьшается.*

Таблица 2.1

Влияние абсолютной погрешности ε в значениях y_i на абсолютные погрешности их конечных разностей

Разность	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	...	$\Delta^k y_i$
Абсолютная погрешность	2ε	4ε	8ε	...	$2^k\varepsilon$

Погрешность округления обратно пропорциональна шагу расчета h в формулах для первой производной, обратно пропорциональна h^2 в формулах для второй производной и т. д. Поэтому при уменьшении шага расчета h погрешность округления *увеличивается.* Для оценки погрешности округления применяют обычные правила, изложенные в гл. I. Если, например, абсолютные погрешности исходных значений y_i не превосходят ε, то абсолютные погрешности округления формул (1.6), (1.7), (1.12) не превосходят, соответственно, величин

$$\frac{2\varepsilon}{2h}=\frac{\varepsilon}{h}, \quad \frac{18\varepsilon}{12h}=\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{h}, \quad \frac{4\varepsilon}{h^2}.$$

Для формул типа (1.8) погрешности округления несколько больше; они составляют соответственно

$$\frac{8\varepsilon}{2h}=4\frac{\varepsilon}{h}, \quad \frac{40\varepsilon}{6h}=6\frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{h}, \quad \frac{128\varepsilon}{12h}=10\frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{h}.$$

Подчеркнем, что погрешности округления быстро возрастают с ростом порядка производной.

Пример 2.1. Оценить погрешности вычисления производных в примере 1.1 из § 1, считая, что все знаки в значениях y_i верны, т. е. погрешности значений y_i меньше $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$.

Решение. В примере 1.1 применялись формулы численного дифференцирования, учитывающие разности до четвертого порядка включительно. Поэтому погрешности усечения оцениваются через разности пятого порядка, которые в табл. 1.1 не превосходят 10^{-5}. Величина этой оценки зависит еще от применяемой формулы численного дифференцирования: в точке $x = 0{,}0$ применялись формулы Ньютона; в точке $x = 0{,}1$ — формула Стирлинга. Результаты расчетов сведены в табл. 2.2. Там же приведены и погрешности округления.

Таблица 2.2

Производная	Точка	Погрешность усечения	Погрешность округления
y'	$x=0{,}0$	$\frac{1}{5h}\mid\Delta^5 y\mid = 4\cdot 10^{-5}$	$10\frac{\varepsilon}{h} = 10^{-3}$
	$x=0{,}1$	$\frac{1}{30h}\mid\Delta^5 y\mid < 0{,}7\cdot 10^{-5}$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{h} = 1{,}5\cdot 10^{-4}$
y''	$x=0{,}0$	$\frac{5}{6}\frac{1}{h^2}\mid\Delta^5 y\mid < 4\cdot 10^{-3}$	$20\frac{\varepsilon}{h^2} = 4\cdot 10^{-2}$
	$x=0{,}1$	$\frac{1}{12}\frac{1}{h^2}\mid\Delta^4 y\mid < 10^{-3}$	$4\frac{\varepsilon}{h^2} = 8\cdot 10^{-3}$

Из табл. 2.2 видно, что здесь погрешности округления значительно превосходят погрешности усечения, так что общая погрешность численного дифференцирования определяется здесь главным образом погрешностями округления. (Конечно, сами оценки погрешностей несколько завышены, как видно из сравнения с истинными погрешностями, приведенными в § 1.) Для уменьшения погрешности округления следовало бы взять *больший* шаг расчета h.

ЗАДАЧИ

Оценить погрешности вычисления производных в задачах 1 а), б) и 2 а), б) из § 1, считая, что все табличные значения y_i даны с верными знаками.

§ 3. Выбор оптимального шага численного дифференцирования

Общая погрешность вычисления производной может рассматриваться как сумма погрешности усечения и погрешности округления. Так как с уменьшением шага расчета h погрешность усечения убывает, а погрешность округления возрастает, то существует оптимальный шаг расчета (разумеется, свой для каждой формулы численного дифференцирования). Так, для формулы (1.6) погрешность усечения не превосходит

$$\frac{h^2}{6} M_3 = \frac{h^2}{6} \max_{(x_{-1},\ x_1)} |f'''(x)|,$$

а погрешность округления оценивается величиной

$$\frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h},$$

где ε — абсолютная погрешность исходных значений функции y_i. Суммарная погрешность оценивается величиной

$$\frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\varepsilon}{h}.$$

Эта величина достигает наименьшего значения при условии

$$\left(\frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\varepsilon}{h}\right)' = \frac{h}{3} M_3 - \frac{\varepsilon}{h^2} = 0,$$

т. е. при $h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}}$, что и определяет оптимальный шаг расчета для формулы (1.6). Полученную формулу для оптимального шага удобно записать в виде

$$\frac{h^2}{6} M_3 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{h} \tag{3.1}$$

или в виде

$$\frac{1}{6h} |\Delta^3 y| \approx \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{h}, \tag{3.2}$$

допускающем простое толкование: оптимальный шаг для формулы (1.6) определяется так, чтобы погрешность усечения составляла примерно половину погрешности округления $\left(\text{при этом полная погрешность не превзойдет } \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h}\right)$.

Подобным же образом выбирается оптимальный шаг и для других формул численного дифференцирования. Для формулы (1.7) оптимальный шаг определяется так, чтобы погрешность усечения $\frac{1}{30h} |\Delta^5 y|$ была примерно равна $^1/_3$ погрешности округления $\frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h}$; при этом полная погрешность не превзойдет $2\frac{\varepsilon}{h}$. Для формулы (1.12) оптимальный шаг определяется так, чтобы погрешность усечения $\frac{1}{12h^2} |\Delta^4 y|$

была примерно равна погрешности округления $4\frac{\varepsilon}{h^2}$; при этом полная погрешность не превзойдет $8\frac{\varepsilon}{h^2}$.

В приведенных выше формулах под значениями $|\Delta^3 y|$, $|\Delta^4 y|$, $|\Delta^5 y|$ подразумеваются некоторые средние (для данного участка таблицы) значения абсолютных величин разностей соответствующего порядка.

Пример 3.1. Проследим за изменением погрешности вычисления производной при убывании шага h на простейшем примере функции $y=e^x$, для которой $y'=e^x=y$.

Решение. Возьмем таблицу значений функции e^x с четырьмя десятичными знаками и, значит, с абсолютной погрешностью $\varepsilon=0{,}5\cdot10^{-4}$. Будем применять простейшую формулу численного дифференцирования (1.6) с шагом h, убывающим от 0,10 до 0,01. В качестве точки x_0 возьмем $x_0=1{,}15$. Расчеты представлены в табл. 3.1, в которой для сокращения введено обозначение $\frac{y_1-y_{-1}}{2h}=D_h y_0$.

Таблица 3.1

Численное дифференцирование с шагом h

$h=0{,}10$

x	$y=e^x$	$D_h y_0$	Погрешность
1,05 1,15 1,25	2,8577 3,1582 3,4903	3,1630	—0,0048

$h=0{,}09$

x	$y=e^x$	$D_h y_0$	Погрешность
1,06 1,15 1,24	2,8864 3,1582 3,4556	3,1622	—0,0040

$h=0{,}08$

x	$y=e^x$	$D_h y_0$	Погрешность
1,07 1,15 1,23	2,9154 3,1582 3,4212	3,1613	—0,0031

$h=0{,}07$

x	$y=e^x$	$D_h y_0$	Погрешность
1,08 1,15 1,22	2,9447 3,1582 3,3872	3,1607	—0,0025

$h=0{,}06$

x	$y=e^x$	$D_h y_0$	Погрешность
1,09 1,15 1,21	2,9743 3,1582 3,3535	3,1600	—0,0018

$h=0{,}05$

x	$y=e^x$	$D_h y_0$	Погрешность
1,10 1,15 1,20	3,0042 3,1582 3,3201	3,1590	—0,0008

Таблица 3.1 (*продолжение*)

$h=0{,}04$

x	$y=e^x$	D_hy_0	Погрешность
1,11 1,15 1,19	3,0344 3,1582 3,2871	3,1588	—0,0006

$h=0{,}03$

x	$y=e^x$	D_hy_0	Погрешность
1,12 1,15 1,18	3,0649 3,1582 3,2544	3,1583	—0,0001

$h=0{,}02$

x	$y=e^x$	D_hy_0	Погрешность
1,13 1,15 1,17	3,0957 3,1582 3,2220	3,1575	0,0007

$h=0{,}01$

x	$y=e^x$	D_hy_0	Погрешность
1,14 1,15 1,16	3,1268 3,1582 3,1899	3,1550	0,0032

Из табл. 3.1 видно, что при уменьшении шага h от 0,10 до 0,03 абсолютная величина погрешности численного дифференцирования убывает (от 0,0048 до 0,0001), а затем при дальнейшем уменьшении шага h она начинает снова возрастать (до 0,0032 при $h=0{,}01$). Это означает, что при шаге $h\leqslant 0{,}03$ основную роль начинают играть погрешности округления.

Заметим, что здесь легко подсчитать оптимальный шаг численного дифференцирования по формуле (3.1); это дает

$$h_{\text{опт}}=\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}}=\sqrt[3]{\frac{0{,}00015}{3{,}5}}\approx 0{,}035.$$

Расчет производной с таким шагом представлен в табл. 3.2.

Как видно из сравнения табл. 3.1 и 3.2, оптимальный шаг h по формуле (3.1) определяется весьма грубо; в данном примере наименьшую погрешность дает шаг $h=0{,}03$.

Таблица 3.2

Численное дифференцирование с шагом $h=0{,}035$

x	$y=e^x$	D_hy_0	Погрешность
1,115 1,15 1,185	3,0496 3,1582 3,2707	3,1586	—0,0004

Пример 3.2. Выбрать подходящую формулу и оптимальный шаг численного дифференцирования функции, представленной в табл. 3.3. Значения функции y даны со всеми верными знаками.

Решение. Здесь абсолютная погрешность исходных значений функции не превосходит $\varepsilon=0{,}5\cdot 10^{-4}$. При численном дифференцировании по формуле (1.6) оптимальный шаг определяется условием

$$\frac{1}{6}\Delta^3 y\approx\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Так как конечные разности третьего порядка в табл. 3.3 изменяются от $-3 \cdot 10^{-4}$ до $3 \cdot 10^{-4}$, то величина $\frac{1}{6} \Delta^3 y$ изменяется от $-0{,}5 \cdot 10^{-4}$ до $0{,}5 \cdot 10^{-4}$, т. е. в среднем имеет подходящий порядок.

Таблица 3.3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,0	0,4401			
		308		
1,1	0,4709		—34	
		274		—3
1,2	0,4983		—37	
		237		—1
1,3	0,5220		—38	
		199		—1
1,4	0,5419		—39	
		160		—1
1,5	0,5579		—40	
		120		—1
1,6	0,5699		—41	
		79		—1
1,7	0,5778		—42	
		37		2
1,8	0,5815		—40	
		—3		—2
1,9	0,5812		—42	
		—45		3
2,0	0,5767		—39	
		—84		0
2,1	0,5683		—39	
		—123		1
2,2	0,5560		—38	
		—161		2
2,3	0,5399		—36	
		—197		2
2,4	0,5202		—34	
		—231		2
2,5	0,4971		—32	
		—263		3
2,6	0,4708		—29	
		—292		2
2,7	0,4416		—27	
		—319		
2,8	0,4097			

Поэтому можно вычислять производные по формуле (1.6) с шагом $h = 0{,}1$. Это дает общую погрешность порядка $1{,}5 \frac{\varepsilon}{h} \div 2 \frac{\varepsilon}{h}$, т. е. порядка 10^{-3}. Для уменьшения общей погрешности попробуем увеличить шаг h и применить более точную формулу (1.7). Увеличение шага h вдвое приводит к данным, представленным в табл. 3.4.

Таблица 3.4

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1,0	0,4401					
		582				
1,2	0,4983		—146			
		436		—10		
1,4	0,5419		—156		2	
		280		— 8		6
1,6	0,5699		—164		8	
		116		0		—3
1,8	0,5815		—164		5	
		—48		5		—2
2,0	0,5767		—159		3	
		—207		8		4
2,2	0,5560		—151		7	
		—358		15		—3
2,4	0,5202		—136		4	
		—494		19		
2,6	0,4708		—117			
		—611				
2,8	0,4097					

Из табл. 3.4 видно, что при шаге $h_1 = 2h = 0,2$ абсолютные величины разностей пятого порядка в среднем равны $3,6 \cdot 10^{-4}$, так что $\frac{1}{30} |\Delta^5 y| \approx 1,2 \cdot 10^{-5}$, что составляет примерно четверть от $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$. Если выбрать такой шаг, то погрешность усечения составит $\frac{1}{30 h_1} |\Delta^5 y| \approx 0,6 \cdot 10^{-4}$, а погрешность округления $\frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h} \approx 4 \cdot 10^{-4}$, и, значит, полная погрешность оценивается величиной $5 \cdot 10^{-4}$. Это в два-три раза лучше, чем при шаге $h = 0,1$, но остается еще возможность для дальнейшего увеличения шага.

При увеличении шага расчета в λ раз разности первого порядка увеличиваются в λ раз, второго порядка — в λ^2 раз, ..., пятого порядка — в λ^5 раз. Поэтому выбор шага $h_2 = \frac{3}{2} h_1 = 3h = 0,3$ дает погрешность усечения примерно $\frac{1}{30 h_2} \cdot (1,5)^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 3,3 \cdot 10^{-4}$ при погрешности округления $\frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h_2} = 2,5 \cdot 10^{-4}$, что вполне приемлемо. Дальнейшее увеличение шага уже вряд ли целесообразно, тем более что в табл. 3.4 не хватает данных для составления таблицы разностей до пятого порядка при шаге $h = 0,4$. Итак, в качестве оптимального выбираем шаг $h_2 = 0,3$. С этим шагом можно подсчитать значения производных только в точках $x = 1,6$; $1,7$; ...; $2,2$. При этом удобно использовать формулу (1.7) в *безразностном* выражении, т. е. в виде

$$y_0' \approx \frac{1}{12h}\,(y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2),$$

где под y_i надо понимать $y(x_0 + ih_2)$. Например,

$$y'\,|_{x=1,6} \approx \frac{1}{12\cdot 0,3}(0,4401 - 8\cdot 0,5220 + 8\cdot 0,5812 - 0,5560) = 0,0994,$$

$$y'\,|_{x=1,7} \approx \frac{1}{12\cdot 0,3}(0,4709 - 8\cdot 0,5419 + 8\cdot 0,5767 - 0,5399) = 0,0582.$$

В точках $x = 1,4$; $1,5$ и $x = 2,3$; $2,4$ можно еще пользоваться формулой (1.7) с шагом $h_1 = 0,2$, который близок к оптимальному и дает почти такую же точность. В точках, еще более близких к границам таблицы, придется пользоваться формулой (1.6) с шагом $h = 0,1$ или даже формулами Ньютона.

В заключение еще раз подчеркнем, что приведенные оценки погрешностей обычно оказываются несколько завышенными. Так, в рассмотренном примере истинные погрешности вычисления производных в несколько раз меньше приведенных оценок. Для сравнения вычислим значение производной y' в точке $x = 1,6$ по формуле (1.6) с шагом $h = 0,1$. Мы получим

$$y'\,\Big|_{x=1,6} \approx \frac{1}{2\cdot 0,1}\,(0,5778 - 0,5579) = 0,0995,$$

что только на $3\cdot 10^{-4}$ отличается от точного значения 0,0992.

ЗАДАЧИ

Выбрать оптимальный шаг численного дифференцирования и подходящую формулу в задачах 1 а), б) и 2 а), б) из § 1, считая, что все табличные значения y_i даны с верными знаками. В задачах 1 б) и 2 б) найти y'' в точке $x = 1,6$.

ГЛАВА VII

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

§ 1. Квадратурные формулы с равноотстоящими узлами

Заменяя подынтегральную функцию каким-либо интерполяционным многочленом, мы получаем *квадратурные формулы* вида

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R, \tag{1.1}$$

где x_k — выбранные узлы интерполяции, A_k — коэффициенты, зависящие только от выбора узлов, но не от вида функции ($k=0, 1, \ldots, n$), R — остаточный член, или погрешность квадратурной формулы. Отбрасывая остаточный член R, мы совершаем *погрешность усечения*. При расчете к ней еще добавляются различные погрешности округления.

Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей системой точек

$$x_i = x_0 + ih \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),\ x_0 = a,\ x_n = b,\ h = \frac{b-a}{n},$$

и вычислим подынтегральную функцию в полученных узлах

$$y_i = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Квадратурные формулы для равноотстоящих узлов называются *формулами Ньютона—Котеса* (см. [1], [12], [21]). Формулы Ньютона—Котеса различаются степенями использованных интерполяционных многочленов. Чтобы не иметь дело с многочленами высоких степеней, обычно разбивают промежуток интегрирования на отдельные участки, применяют формулы Ньютона—Котеса с невысокими степенями на каждом участке и потом складывают полученные результаты (что дает так называемые *составные формулы*). Наиболее простые из формул такого типа приведены ниже.

1. Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right), \tag{1.2}$$

где $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \ldots, n$).

Остаточный член имеет вид

$$R_1 = -\frac{nh^3}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \qquad a < \xi < b.$$

Формула трапеций дает точное значение интеграла, когда подынтегральная функция $f(x)$ линейна, ибо тогда $f''(x) \equiv 0$.

2. Формула Симпсона (формула парабол):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})], \tag{1.3}$$

где

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}.$$

Остаточный член имеет вид

$$R_2 = -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \qquad a < \xi < b.$$

Формула Симпсона является точной для многочленов до третьей степени включительно, так как в этом случае $f^{(4)}(x) \equiv 0$.

Заметим, что в формуле Симпсона число узлов обязательно нечетное, т. е. n четное, $n = 2m$.

3. Формула Ньютона (правило трех восьмых):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}[y_0 + y_{3m} + 2(y_3 + y_6 + \ldots + y_{3m-3}) +$$

$$+ 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \ldots + y_{3m-2} + y_{3m-1})], \tag{1.4}$$

где

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{3m}.$$

Остаточный член имеет вид

$$R_3 = -\frac{3mh^5}{80} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{80} f^{(4)}(\xi), \qquad a < \xi < b.$$

Заметим, что в формуле (1.4) число узлов обязательно равно $3m + 1$, т. е. $n = 3m$.

Если функция $y = f(x)$ задана таблично и ее производные найти затруднительно, то в предположении отсутствия быстро колеблющихся составляющих можно применять приближенные формулы для погрешностей, выраженные через конечные разности:

$$R_1 \approx -\frac{b-a}{12}\overline{\Delta^2 y}, \tag{1.5}$$

$$R_2 \approx -\frac{b-a}{180}\overline{\Delta^4 y}, \tag{1.6}$$

$$R_3 \approx -\frac{b-a}{80}\overline{\Delta^4 y}, \tag{1.7}$$

где под $\overline{\Delta^2 y}$, $\overline{\Delta^4 y}$ подразумевается арифметическое среднее значение разностей соответствующего порядка.

Пример 1.1. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

по формуле трапеций при $n=10$ и оценить погрешность вычислений.

Решение. Оценим сначала остаточный член. Для этого находим вторую производную функции $y=e^{-x^2}$:

$$y''=2(2x^2-1)\,e^{-x^2}.$$

На отрезке $[0, 1]$ абсолютная величина второй производной $|y''(x)|$ имеет наибольшее значение при $x=0$. Таким образом, имеем

$$|R_1|\leqslant\frac{\max|y''(x)|}{12}\,|b-a|\,h^2=\frac{2\cdot(0,1)^2}{12}<0{,}002.$$

Чтобы погрешности округления не испортили точность результата будем вести вычисления с одним запасным знаком, т. е. с четырьмя знаками после запятой. Составляем таблицу значений подынтегральной функции (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Значения функции $y=e^{-x^2}$

i	x_i	x_i^2	y_i	i	x_i	x_i^2	y_i
0	0	0	1,0000	6	0,6	0,36	0,6977
1	0,1	0,01	0,9900	7	0,7	0,49	0,6126
2	0,2	0,04	0,9608	8	0,8	0,64	0,5273
3	0,3	0,09	0,9139	9	0,9	0,81	0,4449
4	0,4	0,16	0,8521	10	1,0	1,00	0,3679
5	0,5	0,25	0,7788				
$\frac{1}{2}(y_0+y_{10})+\sum_{i=1}^{9} y_i=7{,}4620$							

По формуле трапеций получим

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\approx 0{,}1\cdot 7{,}4620=0{,}7462.$$

Окончательный ответ округляем до трех знаков:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\approx 0{,}746.$$

Пример 1.2. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

по формуле Симпсона при $n=10$ и оценить остаточный член.

Решение. Оценим остаточный член, для этого найдем четвертую производную функции $y=e^{x^2}$:

$$y^{(4)}(x)=4\,(4x^4+12x^2+3)\,e^{x^2}.$$

Производная $y^{(4)}(x)$ имеет наибольшее значение на отрезке $[0,\ 1]$ при $x=1$. Таким образом,

$$|R_2|\leqslant\frac{5\cdot(0,1)^5}{90}\cdot 76\cdot 2,718\approx 0,000115.$$

Составляем таблицу значений подынтегральной функции $y=e^{x^2}$ (табл. 1.2), записывая ординаты с четными и с нечетными номерами в разные столбцы. В последней строке таблицы записываем результаты суммирования по этим столбцам. Затем по формуле Симпсона находим

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx\approx\frac{1}{30}(3,7183+4\cdot 7,2685+2\cdot 5,5441)=1,46268.$$

Таблица 1.2

Значения функции $y=e^{x^2}$

i	x_i	x_i^2	Значения $y_i=e^{x_i^2}$		
			при $i=0$, $i=10$	при четном i	при нечетном i
0	0,0	0,00	1,0000		
1	0,1	0,01			1,0101
2	0,2	0,04		1,0408	
3	0,3	0,09			1,0942
4	0,4	0,16		1,1735	
5	0,5	0,25			1,2840
6	0,6	0,36		1,4333	
7	0,7	0,49			1,6323
8	0,8	0,64		1,8965	
9	0,9	0,81			2,2479
10	1,0	1,00	2,7188		
Суммы			3,7188	5,4441	7,2685

Окончательный ответ округляем до четырех знаков:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx 1{,}4627.$$

Пример 1.3. Вычислить интеграл

$$\int_0^{0,6} \frac{dx}{1+x}$$

по формуле Ньютона (по правилу трех восьмых), взяв шаг $h=0{,}1$, и оценить остаточный член.

Решение. Для оценки остаточного члена находим четвертую производную подынтегральной функции $y=(1+x)^{-1}$:

$$y^{(4)}=24\,(1+x)^{-5}.$$

На отрезке $[0;\ 0{,}6]$ она имеет максимальное значение при $x=0$. Поэтому

$$|R_3| \leqslant \frac{6\cdot(0{,}1)^5}{80}\cdot 24 = 1{,}8\cdot 10^{-5}.$$

Составляем таблицу значений подынтегральной функции (табл. 1.3), записывая эти значения в три столбца в зависимости от номера.

Таблица 1.3

Значения функции $y=\dfrac{1}{1+x}$

i	x_i	$1+x_i$	Значения $y_i=\frac{1}{1+x_i}$ для $i=0$, $i=6$	для $i=3$	для $i=1, 2, 4, 5$
0	0,0	1,0	1,00000		
1	0,1	1,1			0,90909
2	0,2	1,2			0,83333
3	0,3	1,3		0,76923	
4	0,4	1,4			0,71429
5	0,5	1,5			0,66667
6	0,6	1,6	0,62500		
Суммы			1,62500	0,76923	3,12338

В последней строке таблицы записаны результаты суммирования по этим столбцам. Используя результаты вычислений, по формуле (1.4) находим

$$\int_0^{0,6} \frac{dx}{1+x} \approx \frac{3}{8}\,0{,}1\cdot(1{,}62500+1{,}53846+9{,}37014)=0{,}47001.$$

Пример 1.4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,8} f(x)\,dx$ по формуле Симпсона и оценить остаточный член, если подынтегральная функция задана таблицей

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$f(x)$	1,0000	0,9950	0,9801	0,9553	0,9211	0,8776	0,8253	0,7648	0,6967

Решение. В качестве шага h возьмем шаг таблицы $h=0{,}1$, тогда $n=2m=8$. Нужные для расчета суммы подсчитаны в табл. 1.4.

Используя результаты вычислений, по формуле (1.3) находим

$$\int\limits_0^{0,8} f(x)\,dx \approx \frac{1}{30}(1{,}6967+4\cdot 3{,}5927+2\cdot 2{,}7265)=0{,}71735.$$

Для оценки погрешности составим таблицу конечных разностей для заданной функции (табл. 1.5) и воспользуемся формулой (1.6).

Таблица 1.4

Значения функции $f(x)$

i	x_i	Значения $f(x_i)$		
		при $i=0$ и $i=8$	при нечетном i	при четном i
0	0	1,0000		
1	0,1		0,9950	
2	0,2			0,9801
3	0,3		0,9553	
4	0,4			0,9211
5	0,5		0,8776	
6	0,6			0,8253
7	0,7		0,7648	
8	0,8	0,6967		
Суммы		1,6967	3,5927	2,7265

Таблица 1.5

Конечные разности для функции $y=f(x)$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	1,0000	—50	—99	0	+5
0,1	0,9950	—149	—99	5	—4
0,2	0,9801	—248	—94	1	+4
0,3	0,9553	—342	—93	5	+1
0,4	0,9211	—435	—88	6	0
0,5	0,8776	—523	—82	6	
0,6	0,8253	—605	—76		
0,7	0,7648	—681			
0,8	0,6967				

Среднее значение разностей четвертого порядка в табл. 1.5 равно $\overline{\Delta^4 y} \approx 2\cdot 10^{-4}$; поэтому по формуле (1.6) получаем

$$R_2 \approx \frac{0{,}8\cdot 2\cdot 10^{-4}}{180} \approx 10^{-6},$$

так что в полученном результате можно все знаки считать верными.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить приближенно по формуле трапеций интеграл

$$\int_0^1 (3x^2-4x)\,dx,$$

полагая $n=10$. Вычислить этот интеграл точно и найти абсолютную и относительную погрешности результата.

2. Вычислить по формуле Симпсона интеграл

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x},$$

принимая $n=10$. Оценить абсолютную погрешность Δ результата, используя формулу остаточного члена.

В следующих задачах вычислить приближенно интегралы по указанным формулам и оценить остаточный член R.

3. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций при $n=4$.

4. $\int\limits_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$ по формуле трапеций при $n=8$.

5. $\int\limits_0^{1,2} \ln(1+x^2)\,dx$

а) по формуле трапеций при $n=6$, б) по формуле Симпсона при $n=6$.

6. $\int\limits_0^1 \sin x^2\,dx$

а) по формуле трапеций при $n=10$, б) по формуле Симпсона при $n=10$.

7. $\int\limits_0^1 \cos x^2\,dx$

а) по формуле трапеций при $n=10$, б) по формуле Симпсона при $n=10$.

8. $\int\limits_4^{5,2} \ln x\,dx$

а) по формуле трапеций при $n=6$, б) по формуле Симпсона при $n=6$.

9. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{1+x}$

а) по формуле трапеций при $n=4$, б) по формуле Симпсона при $n=4$.

10. $\int\limits_{0,1}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ по правилу трех восьмых при $n=30$.

§ 2. Выбор шага интегрирования

Задача состоит в выборе шага h, обеспечивающего заданную точность ε вычисления интеграла по выбранной формуле численного интегрирования.

Рассмотрим два способа решения этой задачи.

1. Выбор шага по оценке остаточного члена. Пусть требуется вычислить интеграл с точностью ε. Используя формулу соответствующего остаточного члена R, выбирают h таким, чтобы выполнялось неравенство $|R| < \varepsilon/2$. Затем вычисляют интеграл по приближенной формуле с полученным шагом. При этом вычисления следует производить с таким числом знаков, чтобы погрешность округления не превышала $\varepsilon/2$.

Замечание. Бывают ситуации, когда допустимую погрешность ε делят между погрешностью усечения и погрешностью округления не поровну. Например, если вычисления значений подынтегральной функции очень трудоемки, но могут быть произведены с любой точностью, то может оказаться целесообразным выбирать шаг h из условия $|R| < \varepsilon$. Другой крайний случай может представиться для функций, задаваемых экспериментально, когда трудно обеспечить большую точность вычисления значений функции.

Пример 2.1. С помощью формулы Симпсона вычислить интеграл

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Выберем сначала шаг интегрирования.

Остаточный член формулы Симпсона имеет вид

$$R = -\frac{h^4 (b-a)}{180} f^{(4)}(\xi), \qquad a < \xi < b.$$

Выберем шаг h таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{h^4 (b-a)}{180} \max_{[a,\, b]} |f^{(4)}(x)| < 0{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

Вычисляем $f^{(4)}(x)$:

$$f^{(4)}(x) = \frac{\sin x}{x} + 4\frac{\cos x}{x^2} - 12\frac{\sin x}{x^3} - 24\frac{\cos x}{x^4} + 24\frac{\sin x}{x^5}.$$

При оценке $|f^{(4)}(x)|$ на отрезке $[\pi/4, \pi/2]$ воспользуемся тем, что величины

$$\frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{12}{x^2} + \frac{24}{x^4}\right) \quad \text{и} \quad 4\frac{\cos x}{x^2}\left(\frac{6}{x^2} - 1\right)$$

на этом отрезке положительны и убывают. Поэтому они достигают наибольшего значения в точке $x=\pi/4$, причем

$$|f^{(4)}(x)| \leqslant \frac{\sin x}{x}\left(1-\frac{12}{x^2}+\frac{24}{x^4}\right)+4\frac{\cos x}{x^2}\left(\frac{6}{x^2}-1\right) < 81.$$

Таким образом, для определения шага расчета h мы получаем неравенство

$$\frac{h^4\cdot\frac{\pi}{4}}{180}\cdot 81 < 0,5\cdot 10^{-3},$$

откуда $h^4 < 14\cdot 10^{-4}$ и $h < 1,9\cdot 10^{-1}=0,19$.

С другой стороны, шаг расчета h следует выбирать так, чтобы разделить отрезок $[\pi/4,\ \pi/2]$ на четное число равных частей. Указанным двум условиям отвечает значение $h=\pi/24=0,13<0,19$, при котором $n=(b-a)/h=6$. Далее, для того чтобы погрешность вычислений не превышала $0,5\cdot 10^{-3}$, достаточно вести вычисления с четырьмя знаками после запятой.

Составляем таблицу значений функции $y=\frac{\sin x}{x}$ с шагом $h=\pi/24=$ $=7°30'=0,13090$ (табл. 2.1). В последней строке таблицы записываем результаты суммирования по столбцам.

Таблица 2.1

Значения функции $y=\frac{\sin x}{x}$

i	x_i°	x_i	$\sin x$	$y_0,\ y_6$	y_{2m}	y_{2m-1}
0	45°00′	0,7854	0,7071	0,9003		
1	52°30′	0,9163	0,7934			0,8659
2	60°00′	1,0472	0,8660		0,8270	
3	67°30′	1,1781	0,9239			0,7842
4	75°00′	1,3090	0,9659		0,7379	
5	82°30′	1,4399	0,9914			0,6885
6	90°00′	1,5708	1,0000	0,6366		
			Суммы	1,5369	1,5649	2,3386

Затем по формуле Симпсона при $n=6$ находим

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)\right]=$$

$$=0,043633\,(1,5369+4\cdot 2,3386+2\cdot 1,5649)=0,6118.$$

Окончательный результат округляем до трех знаков:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 0{,}612.$$

2. Двойной пересчет. Так как отыскание $\max|f^{(k)}(x)|$ нередко приводит к слишком громоздким вычислениям, на практике обычно используют следующий прием.

Вычисляют интеграл I по выбранной квадратурной формуле дважды: сначала с некоторым шагом h, затем с шагом $h/2$, т. е. удваивают число n.

Обозначив результаты вычислений через I_n и I_{2n} соответственно, сравнивают их. Если $|I_n - I_{2n}| < \varepsilon$, где ε — допустимая погрешность, то полагают

$$I \approx I_{2n}.$$

Если же окажется, что $|I_n - I_{2n}| \geqslant \varepsilon$, то расчет повторяют с шагом $h/4$. В качестве начального шага иногда можно рекомендовать число, близкое к $\sqrt[m]{\varepsilon}$, где $m = 2$ для формулы трапеций и $m = 4$ для формулы Симпсона.

Указанный прием широко используется при вычислении интегралов на ЭВМ, так как он позволяет осуществить автоматический выбор шага при заданной точности с одновременным контролем вычислений.

Отметим, что для приближенной оценки погрешности усечения Δ можно пользоваться *принципом Рунге*, согласно которому

$$\Delta \approx \frac{1}{3}|I_n - I_{2n}| \quad \text{для формулы трапеций,}$$

$$\Delta \approx \frac{1}{15}|I_n - I_{2n}| \quad \text{для формулы Симпсона.}$$

Пример 2.2. Вычислить по формуле Симпсона интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{x + \cos x}$$

с точностью $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-4}$.

Решение. Делим отрезок $[0, \pi]$ на восемь частей и находим значения подынтегральной функции в точках деления (табл. 2.2). Затем вычисляем интеграл по формуле Симпсона сначала с шагом $h = \pi/8$ $(n = 8)$, затем с шагом $h = \pi/4$ $(n = 4)$.

Результаты вычислений записаны в табл. 2.2. В столбце y_i этой таблицы подчеркнуты те значения y_i, которые используются при вычислении интеграла с шагом $h = \pi/4$. В столбцах m_i' и m_i указаны коэффициенты, с которыми используются в формуле Симпсона ординаты y_i при вычислениях с шагами $h = \pi/8$ и $h = \pi/4$ соответственно. В последней строке таблицы приведены соответствующие суммы $\sum m_i' y_i$ и $\sum m_i y_i$.

Таблица 2.2

Значения функции $y=\dfrac{1}{x+\cos x}$

i	x_i°	x_i	$\cos x_i$	$x_i+\cos x_i$	y_i	m_i'	m_i
0	0°	0	1,0000	1,0000	1,0000	1	1
1	22°30′	0,3927	0,9239	1,3166	0,7595	4	
2	45°	0,7854	0,7071	1,4925	0,6700	2	4
3	67°30′	1,1781	0,3827	1,5608	0,6407	4	
4	90°	1,5708	0,0000	1,5708	0,6366	2	2
5	112°30′	1,9635	—0,3827	1,5808	0,6326	4	
6	135°	2,3562	—0,7071	1,6491	0,6064	2	4
7	157°30′	2,7489	—0,9239	1,8250	0,5480	4	
8	180°	3,1416	—1,0000	2,1416	0,4669	1	1
					Суммы	15,6161	7,8457

По формуле Симпсона находим: при $n=4$, $h=\pi/4=0{,}78540$, $h/3=0{,}26180$

$$I_4=0{,}26180\cdot 7{,}8457=2{,}0540;$$

при $n=8$, $h=\pi/8=0{,}39270$, $h/3=0{,}13090$

$$I_8=0{,}13090\cdot 15{,}6161=2{,}0441.$$

Сравнивая значения I_4 и I_8, получаем

$$|I_4-I_8|=0{,}0099>3\cdot 10^{-4}.$$

Более того, даже $\frac{1}{15}|I_4-I_8|>3\cdot 10^{-4}$, так что погрешность более точного значения I_8 еще недостаточна.

Следовательно, шаг вычисления нужно уменьшить. Проводим аналогичные вычисления с шагами $h=\pi/8$ и $h=\pi/16$. Результат вычисления с шагом $h=\pi/8$ берем из табл. 2.2, вычисления с шагом $h=\pi/16$ даны в табл. 2.3. При шаге $h=\pi/16=0{,}19635$ получаем $I_{16}=0{,}06545\cdot 31{,}2169=2{,}0431$.

Сравнение I_8 и I_{16} дает

$$|I_8-I_{16}|=0{,}0010.$$

По принципу Рунге погрешность более точного значения I_{16} не превосходит $\frac{1}{15}\cdot 0{,}0010<3\cdot 10^{-4}$. Поэтому в значении I_{16} достигнута требуемая точность. Таким образом,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{x+\cos x}=2{,}0432.$$

Таблица 2.3

Значения функции $y=\dfrac{1}{x+\cos x}$ с шагом $h=\dfrac{\pi}{16}$

i	x_i°	x_i	$\cos x_i$	$x_i+\cos x_i$	y_i	m_i
0	0°	0	1,0000	1,0000	1,0000	1
1	11°15′	0,1963	0,9808	1,1771	0,8495	4
2	22°30′	0,3927	0,9239	1,3166	0,7595	2
3	33°45′	0,5890	0,8315	1,4205	0,7040	4
4	45°	0,7854	0,7071	1,4925	0,6700	2
5	56°15′	0,9817	0,5554	1,5371	0,6506	4
6	67°30′	1,1781	0,3827	1,5608	0,6407	2
7	78°45′	1,3744	0,1951	1,5695	0,6371	4
8	90°	1,5708	0,	1,5708	0,6366	2
9	101°15′	1,7670	—0,1951	1,5719	0,6361	4
10	112°30′	1,9635	—0,3827	1,5808	0,6326	2
11	123°45′	2,1599	—0,5554	1,6045	0,6232	4
12	135°	2,3562	—0,7071	1,6491	0,6064	2
13	146°15′	2,5525	—0,8315	1,7210	0,5810	4
14	157°30′	2,7489	—0,9239	1,8250	0,5480	2
15	168°45′	2,9452	—0,9808	1,9644	0,5090	4
16	180•	3,1416	—1,0000	2,1416	0,4669	1
					Сумма	31,2169

ЗАДАЧИ

В задачах 1—3 вычислить интегралы по формуле трапеций с заданной точностью, определяя величину шага h по оценке остаточного члена.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ с точностью до 10^{-2}.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ с точностью до 10^{-2}.

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ с точностью до 10^{-5}.

В задачах 4—33 вычислить интегралы с заданной точностью. Величину шага h, обеспечивающего требуемую точность, определить с помощью двойного пересчета.

Следующие интегралы вычислить по формуле трапеций с точностью до 10^{-2}.

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$. **5.** $\displaystyle\int_1^2 x\lg x\,dx$. **6.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\lg x}{x}\,dx$. **7.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx$. **8.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\,dx$.

Следующие интегралы вычислить по формуле Симпсона с точностью до 10^{-4}.

9. $\int\limits_0^{0,2} \cos\frac{\pi x^2}{2}\,dx$. 10. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$. 11. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

12. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-0,25x^2)}}$. 13. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-0,75x^2)}}$. 14. $\int\limits_0^{0,5} \cos\frac{x^2}{4}\,dx$.

15. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$. 16. $\int\limits_0^{0,5} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{x}\,dx$. 17. $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{1-0,25\sin^2 x}}$.

18. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{\frac{1-0,25x^2}{1-x^2}}\,dx$. 19. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{\frac{1-0,75x^2}{1-x^2}}\,dx$.

Следующие интегралы вычислить по формуле Симпсона с точностью до 10^{-3}.

20. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx$. 21. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\cos x\,dx$. 22. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+x+\sqrt{\sin x}}$.

23. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{x+\sqrt{\cos x}}$. 24. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{1+\sqrt{\ln x}}$.

25. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^3 x}$.

26. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$. 27. $\int\limits_0^1 e^{-5x^3+x+0,5}\,dx$. 28. $\int\limits_0^1 e^{-4x^3+2x+1}\,dx$.

29. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx$. 30. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. 31. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-0,5\sin^2 x}\,dx$.

Вычислить интегралы по формуле Симпсона с точностью до 10^{-4}.

32. $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin ax}{x}\,dx$, $I_2 = \int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{e^{ax}}{x}\,dx$, $a = 0,05k$, $k = 2, 3, \ldots, 22$.

33. $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2}\sin ax}{a+x^2}\,dx$, $I_2 = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{a+x^2}}{1+\cos ax}\,dx$, $a = 0,5+0,1k$,

$k = 0, 1, 2, \ldots, 15$.

34. По формуле Симпсона найти приближенное значение интеграла $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$ с двойным пересчетом, если подынтегральная функция $f(x)$ задана табл. 2.4.

Таблица 2.4

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,0	1,00000	0,7	0,61263	1,4	0,14086
0,1	0,99005	0,8	0,52729	1,5	0,10540
0,2	0,96079	0,9	0,44486	1,6	0,07730
0,3	0,91393	1,,0	0,36788	1,7	0,05558
0,4	0,85214	1,1	0,29820	1,8	0,03916
0,5	0,77880	1,2	0,23693	1,9	0,02705
0,6	0,69768	1,3	0,18452	2,0	0,01832

Найти погрешность R, пользуясь принципом Рунге.

§ 3. Квадратурные формулы Гаусса

В квадратурных формулах Гаусса

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) + R_n(f) \tag{3.1}$$

коэффициенты A_i и абсциссы t_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) подбираются так, чтобы формула была точной для всех многочленов наивысшей возможной степени N.

Доказано (см. [1], [12]), что такие числа A_i, t_i определяются однозначно при $N = 2n - 1$. В табл. 3.1 приведены значения абсцисс t_i и коэффициентов A_i, а также формулы остаточных членов $R_n(f)$ при $n = 4, 5, 7$.

Неудобство применения квадратурной формулы Гаусса состоит в том, что абсциссы t_i и коэффициенты A_i, вообще говоря, иррациональные числа. Этот недостаток искупается ее высокой точностью при сравнительно малом числе узлов интегрирования. В тех случаях, когда подынтегральная функция сложна и на вычисление ее значений в каждом узле интегрирования требуется много времени, применение формулы Гаусса особенно выгодно.

Получить оценку погрешности результата, используя формулу остаточного члена, для формул Гаусса удается очень редко, так как это связано с вычислением производных высоких порядков от подынтегральной функции (см. табл. 3.1). В настоящее время разработаны практически более удобные методы, позволяющие осуществить контроль точности (см. [19]).

При вычислении интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Таблица 3.1

Абсциссы t_i и коэффициенты A_i квадратурных формул Гаусса

n	t_i	A_i	$R_n(f)$
4	$-t_1=t_4=0{,}861136312$ $-t_2=t_3=0{,}339981044$	$A_1=A_4=0{,}347854845$ $A_2=A_3=0{,}652145155$	$R_4(f)\approx 2{,}88\cdot 10^{-7}f^{(8)}(\xi)$ $-1<\xi<1$
5	$-t_1=t_5=0{,}906179846$ $-t_2=t_4=0{,}538469310$ $t_3=0$	$A_1=A_5=0{,}236926885$ $A_2=A_4=0{,}478628670$ $A_3=0{,}568888889$	$R_5(f)\approx 8{,}08\cdot 10^{-4}f^{(10)}(\xi)$ $-1<\xi<1$
7	$-t_1=t_7=0{,}949107912$ $-t_2=t_6=0{,}741531186$ $-t_3=t_5=0{,}405845151$ $t_4=0$	$A_1=A_7=0{,}129484966$ $A_2=A_6=0{,}279705391$ $A_3=A_5=0{,}381830051$ $A_4=0{,}417959184$	$R_7(f)\approx 2{,}13\cdot 10^{-15}f^{(14)}(\xi)$ $-1<\xi<1$

следует сделать замену переменной

$$x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t.$$

Тогда формула Гаусса будет иметь вид

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}A_if(x_i)+R_n^*(f), \tag{3.2}$$

где

$$x_i=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_i, \tag{3.3}$$

$$R_n^*(f)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1}R_n(f). \tag{3.4}$$

Пример 3.1. По формуле Гаусса при $n=5$ вычислить интеграл

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}. \tag{3.5}$$

Решение. Сделаем замену переменной

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t.$$

Получим интеграл

$$I=2\int_{-1}^{1}\frac{dt}{4+(t+1)^2}.$$

Составляем таблицу значений подынтегральной функции (табл. 3.2) и затем по формуле Гаусса при $n=5$ находим

$$I\approx 2\,[A_1f(t_1)+A_2f(t_2)+A_3f(t_3)+A_4f(t_4)+A_5f(t_5)]=0{,}78539816.$$

Для сравнения приводим точное значение $I = \pi/4 = 0{,}785398163...$ Видно, что в полученном результате верны все восемь знаков. Заметим, что вычисление данного интеграла по формуле Симпсона с шагом $h = 0{,}1$ дает погрешность уже в шестом десятичном знаке.

Таблица 3.2

Вычисление интеграла (3.5) по формуле Гаусса

i	t_i	$f(t_i)$	A_i
1	—0,906179846	0,24945107	0,236926885
2	—0,538469310	0,23735995	0,478628670
3	0	0,2	0,568888889
4	0,538469310	0,15706261	0,478628670
5	0,906179846	0,13100114	0,236926885

Пример 3.2. Сравнить точность вычисления интегралов

$$I_n = \int_{-1}^{1} |x|^n dx \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

по формулам трапеций, Симпсона и Гаусса для трех точек.

Решение. По формуле трапеций с шагом $h = 1$ имеем

$$I_n \approx 1\left(\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right) = 1;$$

по формуле Симпсона с тем же шагом имеем

$$I_n \approx \frac{1}{3}(1 + 0 + 1) = \frac{2}{3}.$$

По формуле Гаусса при $f(x) = |x|^n$ получим

$$I_n \approx \frac{5}{9}\left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] + \frac{8}{9} f(0) = \frac{10}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{n/2}.$$

Отметим еще точное значение интеграла

$$I_n = 2\int_{0}^{1} x^n\, dx = \frac{2}{n+1}.$$

Таким образом, при $n = 1$ формула трапеций дает точное значение $I_1 = 1$, формула Симпсона дает погрешность 1/3, формула Гаусса дает значение $\frac{10}{9}\sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}861$ с погрешностью 0,139. При $n = 2$ формула Симпсона и формула Гаусса дают точное значение $I_2 = 2/3$, а формула трапеций дает погрешность 1/3. При $n = 3$ точное значение $I_3 = 2/4$, формула Гаусса дает 0,5164 с погрешностью 0,0164, формула Симпсона дает погрешность $\frac{2}{3} - \frac{2}{4} = 0{,}167$, формула трапеций дает погрешность 0,5, т. е. 100%. При $n = 4$ формула Гаусса дает точное значение $I_4 = \frac{2}{5}$, формула Симпсона дает погрешность $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$, формула трапеций дает погрешность $3/5 = 0{,}6$.

Это сравнение показывает, что формула трапеций может давать бóльшую точность, чем формулы Симпсона и Гаусса для функций с разрывами производной. Для функций же, имеющих достаточное количество непрерывных производных, формула Гаусса значительно точнее, чем формула Симпсона, а последняя — точнее, чем формула трапеций. Это хорошо иллюстрирует пример вычисления по трем точкам интеграла

$$I = \int_{-1}^{1} e^x\, dx = e - e^{-1} = 2{,}3504.$$

По формуле трапеций получаем

$$I \approx \frac{0{,}3679}{2} + 1 + \frac{2{,}7183}{2} = 2{,}5431 \text{ с погрешностью } 0{,}193.$$

По формуле Симпсона получаем

$$I \approx \frac{1}{3}(0{,}3679 + 4\cdot 1 + 2{,}7183) = 2{,}3621 \text{ с погрешностью } 0{,}0117.$$

По формуле Гаусса получаем

$$I \approx \frac{5}{9}(0{,}4609 + 2{,}1686) + \frac{8}{9} = 2{,}3497 \text{ с погрешностью } 0{,}0007.$$

ЗАДАЧИ

Вычислить интегралы по формуле Гаусса и оценить погрешность (остаточный член R).

1. $\int_1^3 \frac{dx}{1+x}$ при $n=4$.

2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+3}$ при $n=5$.

3. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$ при $n=4$.

Вычислить интегралы по формуле Гаусса.

4. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(3t^2+4)}}$ при $n=4$.

5. $\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\, dx$ при $n=5$.

6. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx$ при $n=4$.

7. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ при $n=4$.

8. $I=\int\limits_0^1 \frac{e^{-ax^2}\,dx}{1+\sin ax}$ при $n=5$, $a=0{,}5+0{,}2\cdot k$, $k=0, 1, \ldots, 10$.

9. $I=\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{3-ax}\cos ax\,dx$ при $n=5$, $a=0{,}5+0{,}1\cdot k$,

$k=0, 1, \ldots, 14$.

§ 4. Интегрирование с помощью степенных рядов

Рассмотрим определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{4.1}$$

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

сходящийся в интервале $(-R, R)$, который содержит отрезок интегрирования $[a, b]$.

Применяя теорему о почленном интегрировании степенных рядов (см. [55]), можно представить интеграл (4.1) в виде числового ряда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right). \tag{4.2}$$

Если ряд (4.2) сходится достаточно быстро, то можно приближенно вычислить определенный интеграл с помощью частичной суммы ряда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\sum_{k=0}^{N}\frac{c_k}{+1}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right). \tag{4.3}$$

Погрешность результата в таком случае складывается из следующих погрешностей:

1) из погрешности замены ряда частичной суммой; эта погрешность (погрешность усечения) равна остатку ряда;

2) из погрешностей округления при вычислении суммы (4.3).

Для знакочередующегося ряда с монотонно убывающими по абсолютной величине членами абсолютная величина остатка ряда не превосходит абсолютной величины первого из отбрасываемых членов ряда (см. примеры 4.1 и 4.2). Для оценки остатка ряда в других случаях применяют мажорирование такими числовыми рядами, остатки которых легко оцениваются (см. пример 4.3).

Пример 4.1. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx,$$

разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд и используя семь членов этого разложения. Оценить погрешность.

Решение. Имеем

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

Этот ряд сходится при любом x; проинтегрировав почленно первые семь членов, получим

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}+\frac{x^{13}}{13\cdot 6!}\right]_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}. \qquad (4.4)$$

Оценка остатка ряда дает

$$|R_7|\leqslant\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}\bigg|_0^1=\frac{1}{75600}<1{,}5\cdot 10^{-5}.$$

Учитывая это, вычисляем сумму (4.4) с пятью знаками после запятой (с одним запасным знаком). Окончательно получаем

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=0{,}7468$$

со всеми верными знаками.

Пример 4.2. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^{\pi/4}\sin(x^2)\,dx$$

с точностью до 10^{-4} путем разложения подынтегральной функции в степенной ряд.

Решение. Разложим функцию $f(x)=\sin(x^2)$ в степенной ряд

$$\sin(x^2)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots$$

Этот ряд сходится при любом x. Проинтегрируем его почленно в пределах от 0 до $\pi/4$:

$$I=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}+\ldots\right]_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3-\frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7+\frac{1}{11\cdot 5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{11}-\frac{1}{15\cdot 7!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15}+\ldots$$

Так как полученный числовой ряд является знакочередующимся, то достаточно выбрать такое число членов, чтобы первый из отброшенных был меньше, чем 10^{-4}. Этому условию удовлетворяет третий член, так как

$$\frac{\pi^{11}}{11\cdot 5!\,4^{11}} < \frac{(0{,}786)^{11}}{1320} = \frac{0{,}051}{1320} < 4\cdot 10^{-5}.$$

Подсчитаем сумму двух первых членов. Вычисления будем вести с пятью знаками после запятой, а окончательный ответ округлим:

$$I = \frac{\pi^3}{3\cdot 4^3} - \frac{\pi^7}{7\cdot 3!\,4^7} = \frac{1}{3}(0{,}78540)^3\left[1 - \frac{(0{,}78540)^4}{14}\right] = 0{,}1571.$$

Пример 4.3. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1 - x^5}$$

с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение. Разложим функцию $f(x) = \frac{1}{1-x^5}$ в степенной ряд

$$\frac{1}{1-x^5} = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots + x^{5n-5} + \ldots$$

Областью сходимости этого ряда является интервал $(-1,\ 1)$. Отрезок интегрирования входит в этот интервал, следовательно, написанный ряд можно почленно интегрировать.

Интегрируя на отрезке $[0;\ 0{,}5]$, получим

$$I = \left[x + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{16}}{16} + \ldots + \frac{x^{5n-4}}{5n-4} + \ldots\right]_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6\cdot 2^6} + \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{16\cdot 2^{16}} + \ldots + \frac{1}{(5n-4)\,2^{5n-4}} + \ldots$$

Так как уже третий член здесь меньше, чем 10^{-4}, то пробуем взять в качестве приближенного значения интеграла сумму первых двух членов; оценим сумму отбрасываемых при этом членов (остаток ряда R_2):

$$R_2 = \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{16\cdot 2^{16}} + \frac{1}{21\cdot 2^{21}} + \ldots + \frac{1}{(5n-4)\,2^{5n-4}} + \ldots$$

Заменим во всех членах, начиная со второго, множители 16, 21 и т. д., стоящие в знаменателе, числом 11. Тогда получим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$R_2 < \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{11\cdot 2^{16}} + \ldots + \frac{1}{11\cdot 2^{5n-4}} + \ldots = \frac{1}{11\cdot 2^{11}}\cdot\frac{1}{1 - \frac{1}{2^5}} =$$

$$= \frac{1}{11\cdot 2^6\cdot 31} = \frac{1}{21\,824} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, сумма двух первых членов проинтегрированного ряда дает значение интеграла с заданной точностью.

Получаем ответ:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1-x^5} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{6\cdot 2^6} = 0,5026.$$

ЗАДАЧИ

В задачах 1—4 вычислить интегралы, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд и взяв три члена этого разложения. Оценить погрешность R.

1. $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$ **2.** $\displaystyle\int_0^{1} \cos(x^2)\,dx.$

3. $\displaystyle\int_0^{0,25} \sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}\,dx.$ **4.** $\displaystyle\int_0^{0,5} x^2\sqrt{1+x^2}\,dx.$

Вычислить интегралы с указанной точностью ε.

5. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \varepsilon = 10^{-5}.$ **6.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \varepsilon = 10^{-3}.$

7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx,\quad \varepsilon = 10^{-4}.$

8. Вычислить

$$\arcsin 0,2 = \int_0^{0,2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

с точностью до 10^{-5}.

С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить с точностью до 10^{-3} следующие интегралы.

9. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx.$ **10.** $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$ **11.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

12. $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$ **13.** $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{\arcsin x}{x}\,dx.$

Вычислить интегралы с точностью до 10^{-4}.

14. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx.$ **15.** $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt[3]{x}\cos x\,dx.$

16. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$ **17.** $\displaystyle\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})\,dx.$

18. $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx$. 19. $\int\limits_{0}^{1/9} \sqrt{x}\, e^x\,dx$. 20. $\int\limits_{0,2}^{0,3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

21. $\int\limits_{0,5}^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. 22. $\int\limits_{0}^{0,5} \sqrt{1+x^5}\,dx$. 23. $\int\limits_{0}^{0,5} \sqrt{x-x^3}\,dx$.

24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$. 25. $\int\limits_{0,5}^{0,8} \sqrt{1+x^3}\,dx$. 26. $\int\limits_{0,5}^{1} \sqrt{1+x^3}\,dx$.

§ 5. Интегралы от разрывных функций. Метод Л. В. Канторовича выделения особенностей

Пусть требуется вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{5.1}$$

где подынтегральная функция $f(x)$ обращается в бесконечность в некоторой точке c отрезка $[a, b]$. Как известно, по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta_1 \to 0\\ \delta_2 \to 0}} \left\{ \int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx \right\}. \tag{5.2}$$

Чтобы вычислить сходящийся несобственный интеграл с заданной точностью ε, выбирают положительные числа δ_1 и δ_2 столь малыми, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затем по каким-либо квадратурным формулам приближенно вычисляют определенные интегралы

$$\int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx. \tag{5.3}$$

Если S_1 и S_2 — приближенные значения интегралов (5.3) с точностью до $\varepsilon/4$ каждое, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx S_1 + S_2$$

с точностью до ε.

Пример 5.1. Вычислить с точностью до 0,05 интеграл

$$I = \int\limits_{0,3}^{2} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}.$$

Решение. Подынтегральная функция имеет разрыв при $x = 2$. Представим интеграл в виде суммы двух интегралов

$$I_1 = \int\limits_{0,3}^{2-\delta} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}, \qquad I_2 = \int\limits_{2-\delta}^{2} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

и выберем δ так, чтобы величина I_2 оказалась достаточно малой. Так, при $\delta \leqslant 0,1$ интеграл I_2 удовлетворяет условию

$$0 < I_2 < \frac{e^{-1,9}}{\sqrt[4]{2,9}} \int\limits_{2-\delta}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}} = 0,115 \cdot \frac{4}{3}\,\delta^{3/4} = 0,153\delta^{3/4}.$$

Положив $\delta = 0,1$, получим $I_2 < 0,028$.

Учитывая полученную оценку интеграла I_2, вычислим интеграл

$$I_1 = \int\limits_{0,3}^{1,9} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

по формуле Симпсона с точностью до 0,022. Вычисления с шагами $2h = 0,8$ и $h = 0,4$ дают

$$I_{1;\,2h} = 0,519, \qquad I_{1;\,h} = 0,513.$$

Следовательно, с точностью до 0,004 можем записать

$$I_1 \approx 0,51.$$

Таким образом, полагая $I \approx I_1$, получаем

$$I \approx 0,51,$$

при этом суммарная погрешность результата $\varepsilon = 0,028 + 0,004 \approx 0,03$ удовлетворяет заданному условию.

1. Метод Л. В. Канторовича выделения особенностей. Во многих случаях приближенное вычисление интеграла с конечными пределами от разрывной функции облегчается с помощью метода выделения особенностей, предложенного Л. В. Канторовичем (см. [1], [12], [21], [27]). Идея этого метода состоит в том, что из подынтегральной функции $f(x)$ выделяют некоторую функцию $g(x)$, имеющую те же особенности, что и функция $f(x)$, элементарно интегрируемую на данном промежутке $[a, b]$ и такую, чтобы разность $f(x) - g(x)$ имела нужное число производных. Запишем интеграл в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx + \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,dx,$$

Первый интеграл берется непосредственно, а второй вычисляется по квадратурным формулам.

Подбор функции $g(x)$ производится различным образом, в зависимости от конкретного случая. Выведем правило построения такой функции для одного часто встречающегося класса интегралов. Пусть подынтегральная функция имеет вид

$$f(x)=(x-c)^{\alpha}\varphi(x), \qquad a\leqslant c\leqslant b, \tag{5.4}$$

где $-1<\alpha<0$, а $\varphi(x)$ непрерывна и имеет достаточное число производных на отрезке $[a, b]$. Тогда $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x)=\left[\varphi(c)(x-c)^{\alpha}+\frac{\varphi'(c)}{1!}(x-c)^{\alpha+1}+\frac{\varphi''(c)}{2!}(x-c)^{\alpha+2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{\alpha+k}\right]+(x-c)^{\alpha}\left[\varphi(x)-\varphi(c)-\frac{\varphi'(c)}{1!}(x-c)-\right.$$
$$\left.-\frac{\varphi''(c)}{2!}(x-c)^2-\ldots-\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right]. \tag{5.5}$$

В первых квадратных скобках стоит степенная функция, которая интегрируется непосредственно. Выражение во вторых квадратных скобках обращается в нуль при $x=c$ вместе со своими производными до порядка k включительно. Произведение этого выражения на множитель $(x-c)^{\alpha}$ будет функцией, непрерывной вместе с производными до порядка $k-1$. Поэтому для вычисления интеграла от этой функции можно применить одну из известных квадратурных формул.

Пример 5.2. Вычислить приближенно интеграл

$$I=\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Решение. Подынтегральная функция имеет разрыв при $x=0$. Запишем ее в виде

$$f(x)=x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}.$$

Таким образом, $\alpha=-1/2$, $c=0$, $\varphi(x)=(1-x)^{-1/2}$. По формуле Тейлора имеем

$$\varphi(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+R_4(x).$$

Тогда $f(x)$ можем записать в виде

$$f(x)=\left[x^{-1/2}+\frac{1}{2}x^{1/2}+\frac{3}{8}x^{3/2}+\frac{5}{16}x^{5/2}+\frac{35}{128}x^{7/2}\right]+\frac{\psi(x)}{\sqrt{x}},$$

где

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4\right),$$

причем $\psi(0)=0$.

Отсюда

$$I=\int_0^{0,5}\left(x^{-1/2}+\frac{1}{2}x^{1/2}+\frac{3}{8}x^{3/2}+\frac{5}{16}x^{5/2}+\frac{35}{128}x^{7/2}\right)dx+I_1=$$

$$=1,5691585+I_1,$$

где

$$I_1=\int_0^{0,5}\frac{\psi(x)}{\sqrt{x}}dx.$$

Интеграл I_1 вычисляем по формуле Симпсона при $n=10$, т. е. $h=0,05$. В табл. 5.1 приведены значения подынтегральной функции с точностью до 10^{-6}. В последней строке таблицы подсчитана сумма произведений y_i на множители m_i, откуда

$$I_1=\frac{0,05}{3}\cdot 0,098309=0,0016385.$$

Окончательно получаем

$$I=\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=$$

$$=1,5691585+0,0016385=1,5707970.$$

Для сравнения приводим точное значение интеграла $I=\pi/2=1,5707963$.

Таблица 5.1

Значения функции $y=\dfrac{\psi(x)}{\sqrt{x}}$

i	x_i	y_i	m_i
0	0	0,000000	1
1	0,05	0,000000	4
2	0,10	0,000009	2
3	0,15	0,000056	4
4	0,20	0,000216	2
5	0,25	0,000624	4
6	0,30	0,001508	2
7	0,35	0,003225	4
8	0,40	0,006316	2
9	0,45	0,011588	4
10	0,50	0,020239	1
		Сумма	0,098309

Замечание. Метод Канторовича применим также к несобственным интегралам от разрывных функций другого типа (см. [1], [21]). Если подынтегральная функция имеет несколько точек разрыва, то для вычисления интеграла достаточно разбить промежуток интегрирования на части, содержащие лишь по одной особой точке подынтегральной функции, и воспользоваться свойством аддитивности интеграла. Метод Канторовича может оказаться полезным и при вычислении собственных интегралов, если подынтегральная функция, даже будучи непрерывной, не имеет нужного числа непрерывных производных (что затрудняет оценку погрешности).

2. Применение квадратурных формул с весом. Рассмотрим несобственный интеграл от разрывной функции

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Представим подынтегральную функцию в виде произведения двух функций $\varphi(x)$ и $p(x)$:

$$f(x) = \varphi(x) p(x), \tag{5.6}$$

причем $\varphi(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет достаточное число производных, а $p(x) > 0$ на $[a, b]$. Тогда оказывается возможным подобрать квадратурную формулу вида

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} C_k^{(n)} \varphi(x_k), \tag{5.7}$$

в которой постоянные коэффициенты $C_k^{(n)}$ не зависят от $\varphi(x)$, а абсциссы x_k определяются таким образом, чтобы формула была точной для многочленов наивысшей возможной степени. Возможность построения таких формул показана в [1], [21]. Функция $p(x)$ называется *весовой функцией* или *весом*. Смысл применения квадратурных формул с весом $p(x)$ для интегрирования разрывных функций состоит в том, что остаточный член не зависит от $p(x)$, т. е. от разрывной части функции.

В [19], [22] приведены значения коэффициентов $C_k^{(n)}$ и абсцисс x_k квадратурных формул вида (5.7) для различных весовых функций $p(x)$.

В табл. 5.2 приведены значения $C_k^{(n)}$ и x_k для случая, когда $a = 0$, $b = 1$ и весовая функция имеет вид $p(x) = x^{-1/2}$.

Таблица 5.2

Значения x_k и $C_k^{(n)}$ для квадратурной формулы

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} C_k^{(n)} \varphi(x_k)$$

n	k	x_k	$C_k^{(n)}$
3	1	0,056939	0,935828
	2	0,437198	0,721523
	3	0,869499	0,342649
4	1	0,033648	0,725368
	2	0,276184	0,627413
	3	0,634677	0,444762
	4	0,922157	0,202457
5	1	0,022164	0,591048
	2	0,187831	0,538533
	3	0,461597	0,438173
	4	0,748335	0,298903
	5	0,948494	0,133343

При $a=-1$, $b=1$ и $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имеет место **квадратурная формула Эрмита** (см. [1])

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k), \tag{5.8}$$

где $x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ и

$$R(f)=\frac{\pi}{(2n)!\,2^{n-1}}f^{(2n)}(\xi), \qquad -1<\xi<1. \tag{5.9}$$

Пример 5.3. Вычислить приближенно интеграл

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

и будем рассматривать функцию

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

как весовую. Тогда для вычисления данного интеграла можно использовать квадратурную формулу Эрмита (5.8)

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_k^2}}.$$

Взяв $n=6$, получим

$$I\approx\frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 15^\circ}}+\frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 45^\circ}}+\frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 75^\circ}}\right]=2{,}221329.$$

Заметим, что непосредственное вычисление интеграла с шестью верными знаками дает

$$I=2{,}221441.$$

Пример 5.4. Вычислить приближенно интеграл

$$I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}}.$$

Решение. Обозначим

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \varphi(x)=\frac{1}{4-x}.$$

Используя значения x_k и $C_k^{(n)}$, приведенные в табл. 5.2 при $n=4$, по формуле (5.7) получаем

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}} \approx \frac{0,7254}{3,9664}+\frac{0,6274}{3,7238}+\frac{0,4448}{3,3653}+\frac{0,2025}{3,0778}=0,5493.$$

Непосредственное вычисление интеграла дает

$$\int_0^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\ln 3 \approx 0,5493.$$

ЗАДАЧИ

Применяя метод Канторовича выделения особенностей, вычислить приближенно следующие интегралы.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[4]{(1-x)^3}}$ с точностью до 10^{-5}.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ с точностью до 10^{-6}.

3. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(e^{x/2}+3)}$ с точностью до 10^{-5}.

4. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ с точностью до 10^{-6}.

5. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ с точностью до 10^{-6}.

Вычислить интегралы, используя квадратурные формулы с весом.

6. $\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ при $n=5$.

7. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ при $n=5$.

8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(e^{0,4x}+1,5)}$ при $n=4$.

9. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ при $n=5$.

10. $\int\limits_0^1 \frac{e^{a(x-1)}}{\sqrt{x}\,(x+b)}\,dx$ при $n=5$, $a=0{,}60+0{,}07\,k$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ 8$, $b=2{,}00+0{,}25\cdot k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$.

11. $I=\int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos ax}{(0{,}3+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ при $n=12$, $a=2{,}6+0{,}04\cdot k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 10$.

§ 6. Интегралы с бесконечными пределами

1. Метод усечения. Для того чтобы приближенно вычислить сходящийся несобственный интеграл

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$$

с точностью до ε, представляют его в виде

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_b^\infty f(x)\,dx,$$

где b выбирают настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left|\int\limits_b^\infty f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Затем определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

вычисляют по одной из квадратурных формул с точностью $\varepsilon/2$ и приближенно полагают

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\approx\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 6.1. Вычислить приближенно интеграл

$$\int\limits_2^\infty \frac{dx}{1+x^3}$$

с точностью до $\varepsilon=10^{-2}$.

Решение. Выбираем число b так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_b^\infty \frac{dx}{1+x^3} < \frac{10^{-2}}{2}.$$

Заметив, что

$$\int_b^\infty \frac{dx}{1+x^3} < \int_b^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2b^2},$$

выбираем b из условия

$$\frac{1}{2b^2} = \frac{10^{-2}}{2},$$

откуда получаем $b=10$. Полагаем приближенно

$$\int_2^\infty \frac{dx}{1+x^3} \approx \int_2^{10} \frac{dx}{1+x^3} = I$$

и вычисляем полученный определенный интеграл с точностью до $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$ по формуле Симпсона. В качестве шагов расчета выберем $h_1=1$, $h_2=2$.

Результаты вычислений записаны в табл. 6.1. В последней строке приведены суммы $\sum y_k m_k$ и $\sum y_k m_k'$, с помощью которых вычисляем приближенные значения интеграла. При шаге $h_1=1$ получаем $I_1=\frac{1}{3}\cdot 0{,}3477 = 0{,}1159$; при шаге $h_2=2$ получаем $I_2=\frac{2}{3}\cdot 0{,}1809 = 0{,}1206$. Эти значения различаются меньше чем на $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$.

Окончательно имеем

$$\int_2^\infty \frac{dx}{1+x^3} = 0{,}12.$$

Таблица 6.1

Вычисление интеграла I по формуле Симпсона

k	x_k	$1+x^3$	y_k	m_k	m_k'
0	2,0	9	0,1111	1	1
1	3,0	28	0,0357	4	
2	4,0	65	0,0154	2	4
3	5,0	126	0,0079	4	
4	6,0	217	0,0046	2	2
5	7,0	344	0,0029	4	
6	8,0	513	0,0020	2	4
7	9,0	730	0,0014	4	
8	10,0	1001	0,0010	1	1
			Суммы	0,3477	0,1809

2. Применение квадратурных формул с весом. При вычислении интегралов

$$\int_a^\infty p(x)\,\varphi(x)\,dx$$

часто бывает удобно использовать квадратурные формулы вида

$$\int_a^{\infty} p(x)\,\varphi(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}\varphi(x_k),$$

в которых коэффициенты $A_k^{(n)}$ не зависят от $\varphi(x)$ и абсциссы x_k подбираются так, чтобы формула была точной для многочленов наивысшей возможной степени.

При $p(x)=e^{-x^2}$ имеют место квадратурные формулы с весом Чебышева—Эрмита (см. [21], [22], [33])

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\varphi(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}\varphi(x_k), \tag{6.1}$$

точные для многочленов, степени не выше $2n-1$. Остаточный член формулы (6.1) имеет вид

$$R_n(\varphi)=\frac{n!\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!}\varphi^{(2n)}(\xi). \tag{6.2}$$

В табл. 6.2 приведены значения коэффициентов $A_k^{(n)}$ и абсцисс x_k для некоторых n.

Таблица 6.2

Значения $A_k^{(n)}$ и x_k для квадратурных формул с весом Чебышева — Эрмита

n	x_k	$A_k^{(n)}$
3	$-x_1=x_3=1,224745$ $x_2=0$	$A_1=A_3=0,295409$ $A_2=1,181636$
4	$-x_1=x_4=1,650680$ $-x_2=x_3=0,524648$	$A_1=A_4=0,081313$ $A_2=A_3=0,804914$
5	$-x_1=x_5=2,020183$ $-x_2=x_4=0,958572$ $x_3=0$	$A_1=A_5=0,019953$ $A_2=A_4=0,393619$ $A_3=0,945309$

При $p(x)=e^{-x}$ имеют место квадратурные формулы с весом Чебышева—Лагерра (см. [21], [22], [33])

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}\varphi(x_k), \tag{6.3}$$

точные для многочленов степени не выше чем $2n-1$. Остаточный член формулы (6.3) имеет вид

$$R_n(\varphi)=\frac{n!\Gamma(n+1)}{(2n)!}\varphi^{(2n)}(\xi),$$

где $\Gamma(n+1)$ — гамма-функция. В табл. 6.3 приведены значения $A_k^{(n)}$ и x_k для некоторых n.

Таблица 6.3

Значения $A_k^{(n)}$ и x_k для квадратурных формул с весом Чебышева-Лагерра

n	k	x_k	$A_k^{(n)}$
3	1	0,415774	0,711093
	2	2,294280	0,278518
	3	6,289945	0,010389
4	1	0,322548	0,603154
	2	1,745761	0,357419
	3	4,536620	0,038888
	4	9,395071	0,000539
5	1	0,263560	0,521756
	2	1,413403	0,398667
	3	3,596425	0,075942
	4	7,085810	0,003612
	5	12,640801	0,000023

Пример 6.2. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x\, dx$$

по квадратурной формуле (6.1) при $n=5$.

Решение. Так как узлы квадратурной формулы расположены симметрично относительно $x=0$, а коэффициенты, соответствующие симметричным узлам, равны, то по формуле (6.1) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x\, dx \approx A_3 \cos x_3 + 2(A_4 \cos x_4 + A_5 \cos x_5) =$$

$$=0,945309+2(0,393619\cdot 0,574689-0,019953\cdot 0,434413)=1,380390.$$

Для сравнения заметим, что точное значение интеграла равно

$$\sqrt{\pi}\, e^{-1/4}=1,3803885.$$

ЗАДАЧИ

Вычислить с указанной точностью ε несобственные интегралы методом усечения.

1. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^3}\, dx,\ \varepsilon=10^{-2}$. **2.** $I=\int_1^{\infty} \frac{xe^{-x^2}}{2+\sin x}\, dx,\ \varepsilon=10^{-5}$.

3. $I=\int\limits_{5}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+ax^5}}$, $\varepsilon=10^{-3}$, $a=0{,}5+0{,}1\cdot k$, $k=0, 1, 2, \ldots, 10$.

4. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{-x}}{a+x}dx$, $\varepsilon=10^{-5}$, $a=0{,}4+0{,}2\cdot k$, $k=0, 1, 2, \ldots, 12$.

Вычислить интегралы, используя квадратурные формулы с весом.

5. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xe^{-x}}{x+2}dx$, $n=4$. 6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x+1}{x+2}e^{-x^2}dx$, $n=4$.

7. $I=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{a+x}e^{-x}dx$, $n=5$, $a=0{,}5+0{,}1\cdot k$, $k=0, 1, 2, \ldots, 10$.

8. $I=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}}{a+\sqrt{x}}dx$, $n=5$, $a=0{,}6+0{,}2\cdot k$, $k=0, 1, 2, \ldots, 10$.

9. $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2+\sin ax}}dx$, $n=5$, $a=1{,}5+0{,}2\cdot k$, $k=0, 1, 2, \ldots, 10$.

10. $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{a+x^2}e^{-x^2}dx$, $n=5$, $a=1{,}0+0{,}2\cdot k$, $k=0, 1, 2, \ldots, 10$.

§ 7. Кратные интегралы. Метод повторного интегрирования, метод Люстерника и Диткина, метод Монте-Карло

1. Метод повторного применения квадратурных формул (см. [1], [11], [12]). Пусть требуется вычислить двойной интеграл

$$I=\iint\limits_{G}f(x, y)\,dx\,dy, \tag{7.1}$$

где область G представляет собой прямоугольник

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad c\leqslant y\leqslant d.$$

Вычисление такого интеграла сводится к двукратному интегрированию, т. е.

$$I=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{c}^{d}f(x, y)\,dy. \tag{7.2}$$

Обозначим

$$\int\limits_{c}^{d}f(x, y)\,dy=F(x)$$

и для вычисления интеграла

$$\int_a^b F(x)\,dx \tag{7.3}$$

применим формулу Симпсона с шагом h по x:

$$\int_a^b F(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,[F_0+F_n+2\,(F_2+F_4+\ldots+F_{n-2})+$$
$$+4\,(F_1+F_3+\ldots+F_{n-1})],$$

где $h=\frac{b-a}{n}$ (n — четное),

$$F_i=F(x_i)=\int_c^d f(x_i,\ y)\,dy,\qquad x_i=a+ih\qquad (i=0,1,\ldots,n). \tag{7.4}$$

Таким образом, задача сводится к вычислению $n+1$ интегралов вида (7.4). Указанный метод является наиболее простым методом приближенного вычисления кратных интегралов. Он легко программируется при работе на ЭВМ, так как позволяет использовать уже имеющиеся стандартные программы для вычисления однократных интегралов. При вычислении интегралов (7.3) и (7.4) можно применять различные квадратурные формулы.

Аналогичным образом можно вычислять кратные интегралы размерности $n>2$.

Недостатки метода:

1) его удобно применять только для прямоугольных областей интегрирования;

2) с ростом кратности интеграла резко возрастает объем вычислений;

3) увеличение точности за счет уменьшения шагов интегрирования заметно увеличивает объем вычислений.

Пример 7.1. Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/4} \sin(x+y)\,dy.$$

Решение. Обозначим

$$\int_0^{\pi/4} \sin(x+y)\,dy=F(x).$$

Тогда по формуле Симпсона при $n=4$ будем иметь

$$\int_0^{\pi/2} F(x)\,dx \approx \frac{\pi}{24}\,[F_0+F_4+2F_2+4(F_1+F_3)]. \tag{7.5}$$

Интегралы

$$F_i = F(x_i) = \int_0^{\pi/4} \sin(x_i + y)\, dy \qquad \left(x_i = \frac{\pi}{8} i, \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4\right)$$

вычислим приближенно по формуле Симпсона при $n = 2$. Последовательно получаем

$$F_0 = \int_0^{\pi/4} \sin y\, dy \approx \frac{\pi}{24}\left[\sin y_0 + 4\sin y_1 + \sin y_2\right] =$$
$$= \frac{\pi}{24}\left[\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{24}(0 + 4\cdot 0{,}3827 + 0{,}7071) =$$
$$= \frac{\pi}{24}\cdot 2{,}2379,$$

$$F_1 = \int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{8} + y\right) dy \approx \frac{\pi}{24}\left(\sin\frac{\pi}{8} + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{24}\cdot 4{,}1350,$$

$$F_2 = \int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) dy \approx \frac{\pi}{24}\left(\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{24}\cdot 5{,}4027,$$

$$F_3 = \int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{3\pi}{8} + y\right) dy \approx \frac{\pi}{24}\left(\sin\frac{3\pi}{8} + 4\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{24}\cdot 5{,}8478,$$

$$F_4 = \int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) dy \approx \frac{\pi}{24}\left(\sin\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24}\cdot 5{,}4027.$$

Подставляя значения $F_i\ (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ в формулу (7.5), получаем

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \sin(x+y)\, dx\, dy \approx \left(\frac{\pi}{24}\right)^2 \cdot [2{,}2379 + 5{,}4027 + 2\cdot 5{,}4027 +$$
$$+ 4(4{,}1350 + 5{,}8478)] = 0{,}01713473\cdot 58{,}3772 = 1{,}00028.$$

Для сравнения приводим точное значение интеграла $I = 1$.

2. Метод Л. А. Люстерника и В. А. Диткина (см. [1], [11], [24]). Для вычисления двойного интеграла

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy$$

применяют приближенные формулы вида

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i, y_i), \tag{7.6}$$

где коэффициенты c_i и точки $M_i(x_i, y_i)$ выбираются так, чтобы формула (7.6) была точной для многочленов некоторой достаточно высокой степени при минимальном количестве точек M_i.

Если область G есть единичный круг с центром в начале координат, то интеграл вычисляется по кубатурной формуле Люстерника — Диткина (см. [24])

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy \approx \pi\left[\frac{1}{4}f(0)+\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{5} f(M_i)\right], \tag{7.7}$$

где точки M_i имеют следующие полярные координаты:

$$\rho_i=\sqrt{\frac{2}{3}},\qquad \varphi_i=\frac{\pi}{3}i \qquad (i=0, 1, 2, 3, 4, 5),$$

т. е. точки M_i являются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{2/3}$.

Если область G имеет вид правильного шестиугольника, вписанного в единичный круг, то имеет место следующая кубатурная формула Люстерника — Диткина (см. [24]):

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{43}{56}f(0)+\frac{125}{336}\sum_{i=0}^{5} f(M_i)\right], \tag{7.8}$$

где точки M_i имеют полярные координаты

$$\rho_i=\frac{\sqrt{14}}{15},\qquad \varphi_i=\frac{\pi}{3}i \qquad (i=0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

Если область G — квадрат

$$-1\leqslant x\leqslant 1,\qquad -1\leqslant y\leqslant 1,$$

то кубатурная формула имеет вид (см. [7])

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{8}{7}f(0, 0)+\frac{20}{63}\left[f\left(\sqrt{\frac{14}{15}}, 0\right)+\right.$$
$$\left.+f\left(-\sqrt{\frac{14}{15}}, 0\right)\right]+\frac{5}{9}\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)+f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\right.$$
$$\left.+f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]. \tag{7.9}$$

Замечание 1. Формулы (7.7)—(7.9) можно применять для областей вида:
1) круг произвольного радиуса,
2) правильный шестиугольник, вписанный в круг произвольного радиуса,
3) эллипс,
4) прямоугольник,
если произвести соответствующую замену переменных.

Область произвольной конфигурации можно приближенно заменить суммой указанных областей стандартного типа.

Замечание 2. Оценки погрешностей содержатся в работах [7], [24]. Они показывают, что формулы Люстерника — Диткина требуют значительно меньшего объема вычислений по сравнению с формулами, приведенными в предыдущем пункте, при одинаковой точности.

Однако коэффициенты c_i и координаты точек $M_i(x_i, y_i)$ вычисляются сравнительно легко лишь для достаточно простых областей и при небольшом количестве точек M_i.

Для оценки погрешности можно применить двойной пересчет с областями одинакового типа, но разных размеров.

Пример 7.2. Вычислить интеграл

$$\iint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy \tag{7.10}$$

по области G, ограниченной окружностью $x^2+y^2=2x$.

Решение. Перепишем уравнение данной окружности в виде

$$(x-1)^2+y^2=1$$

и сделаем замену переменных

$$x_1=x-1, \qquad y_1=y.$$

Тогда интеграл (7.10) перейдет в интеграл

$$I=\iint_{G_1} \sqrt{(x_1+1)^2+y_1^2}\,dx_1\,dy_1,$$

где G_1 — единичный круг $x_1^2+y_1^2 \leqslant 1$.

Для вычисления интеграла I воспользуемся формулой (7.7) и для удобства вычислений запишем подынтегральную функцию в полярных координатах:

$$f(x_1, y_1)=\sqrt{\rho^2+2\rho\cos\varphi+1},$$

где $x_1=\rho\cos\varphi$, $y_1=\rho\sin\varphi$. Таким образом, получаем

$$I\approx\pi\left[\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{5}\sqrt{\frac{5}{3}+2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\frac{\pi}{3}i}\right]=$$

$$=\pi\left[0{,}25+\frac{1}{8}\left(\sqrt{3{,}2996}+2\sqrt{2{,}4832}+2\sqrt{0{,}8502}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{0{,}0337}\right)\right]=3{,}533.$$

Заметим, что точное значение интеграла (7.10) равно $32/9=3{,}555$.

3. Метод Монте-Карло (метод статистических испытаний, см. [4], [12]).

Первый способ. Пусть требуется вычислить m-кратный интеграл

$$I=\iint_G\ldots\int f(x_1\ x_2, \ldots, x_m)\,dx_1\ldots dx_m \tag{7.11}$$

по области G, лежащей в m-мерном единичном кубе

$$0\leqslant x_i\leqslant 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Выберем m равномерно распределенных на отрезке [0, 1] последовательностей случайных чисел (о случайных числах см. [6], [10]):

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)},\quad x_2^{(1)},\quad x_3^{(1)},\ \ldots,\ x_n^{(1)},\ \ldots, \\ x_1^{(2)},\quad x_2^{(2)},\quad x_3^{(2)},\ \ldots,\ x_n^{(2)},\ \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(m)},\quad x_2^{(m)},\quad x_3^{(m)},\ \ldots,\ x_n^{(m)},\ \ldots \end{array}$$

Тогда точки $M_i(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(m)})$ $(i=1, 2, \ldots)$ можно рассматривать как случайные, равномерно распределенные в m-мерном единичном кубе.

Пусть из общего числа N случайных точек n точек попали в область G, остальные $N-n$ оказались вне G. Тогда при достаточно большом N имеет место приближенная формула

$$I \approx \frac{V_G}{n}\sum_{i=1}^{n} f(M_i,) \qquad (7.12)$$

где под V_G понимается m-мерный объем области интегрирования. Если вычисление объема V_G затруднительно, то можно принять $V_G \approx n/N$, и для приближенного вычисления интеграла получим

$$I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f(M_i). \qquad (7.13)$$

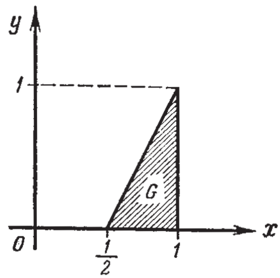

Рис. 2.

Указанный способ можно применить к вычислению кратных интегралов и для произвольной области G, если существует такая замена переменных, при которой новая область интегрирования будет заключена в m-мерном единичном кубе.

Пример 7.3. Методом Монте-Карло вычислить интеграл

$$I = \iint_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \qquad (7.14)$$

где область G определяется следующими неравенствами (рис. 2): $^1/_2 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2x - 1$.

Решение. Область интегрирования принадлежит единичному квадрату $0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1$.

Для вычисления интеграла воспользуемся таблицей случайных чисел (табл. 7.1); при этом каждые два последовательных числа из этой таблицы примем за координаты случайной точки $M(x, y)$.

Записываем координаты x и y случайных точек в табл. 7.2, округляя до трех знаков после запятой, и выбираем те из них, которые принадлежат области интегрирования.

Порядок заполнения таблицы 7.2.

1) Среди всех значений x выделяем те, которые заключены между $\underline{x} = 0{,}5$ и $\overline{x} = 1$. Для этих значений полагаем $\varepsilon_1 = 1$, для всех осталь-

ных $\varepsilon_1 = 0$. Например, для $x = 0{,}577$ имеем $\varepsilon_1 = 1$, для $x = 0{,}170$ имеем $\varepsilon_1 = 0$.

2) Среди всех значений y, соответствующих выделенным x, выбираем те, которые заключены между

$$\underline{y(x)} = 0, \qquad \overline{y(x)} = 2x - 1.$$

Для этих значений полагаем $\varepsilon_2 = 1$, для всех остальных $\varepsilon_2 = 0$. Например, для $y = 0{,}701$ получим $\varepsilon_2 = 0$, для $y = 0{,}205$ получим $\varepsilon_2 = 1$.

Таблица 7.1

Случайные числа, равномерно распределенные на отрезке [0, 1]

0,57705	0,35483	0,11578	0,65339
0,71618	0,09393	0,93045	0,93382
0,73710	0,30304	0,93011	0,05758
0,70131	0,55186	0,42844	0,00336
0,16961	0,64003	0,52906	0,88222
0,53324	0,20514	0,09461	0,98585
0,43166	0,00188	0,99602	0,52103
0,26275	0,55709	0,69962	0,91827
0,05926	0,86977	0,31311	0,07069
0,66289	0,31303	0,27004	0,13928

Таблица 7.2

Вычисление двойного интеграла (7.14) методом Монте-Карло

x	$\underline{x}$	$\overline{x}$	ε_1	y	$\underline{y(x)}$	$\overline{y(x)}$	ε_2	ε	$f(x, y)$
0,577	0,500	1,000	1	0,716	0	0,154	0	0	
0,737	0,500	1,000	1	0,701	0	0,474	0	0	
0,170	0,500	1,000	0	0,533				0	
0,432	0,500	1,000	0	0,263				0	
0,059	0,500	1,000	0	0,663				0	
0,355	0,500	1,000	0	0,094				0	
0,303	0,500	1,000	0	0,552				0	
0,640	0,500	1,000	1	0,205	0	0,280	1	1	0,452
0,002	0,500	1,000	0	0,557				0	
0,870	0,500	1,000	1	0,323	0	0,740	1	1	0,855
0,116	0,500	1,000	0	0,930				0	
0,930	0,500	1,000	1	0,428	0	0,860	1	1	1,048
0,529	0,500	1,000	1	0,095	0	0,058	0	0	
0,996	0,500	1,000	1	0,700	0	0,992	1	1	1,482
0,313	0,500	1,000	0	0,270				0	
0,653	0,500	1,000	1	0,934	0	0,306	0	0	
0,058	0,500	1,000	0	0,003				0	
0,882	0,500	1,000	1	0,986	0	0,764	0	0	
0,521	0,500	1,000	1	0,918	0	0,042	0	0	
0,071	0,500	1,000	0	0,139				0	
							Суммы	4	3,837

3) Вычисляем $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2$. Области интегрирования принадлежат только те точки, для которых $\varepsilon = 1$. Например, для точки $M(0{,}640;\ 0{,}205)$ имеем $\varepsilon = 1$.

В нашем примере области интегрирования принадлежат четыре точки, т. е. $N = 20$, $n = 4$.

4) Вычисляем значения подынтегральной функции в полученных точках.

После заполнения табл. 7.2 вычисляем площадь области интегрирования

$$V_G = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

и по формуле (7.12) находим

$$I \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot (0{,}452 + 0{,}855 + 1{,}048 + 1{,}482) = \frac{1}{16} \cdot 3{,}837 = 0{,}240.$$

Приводим для сравнения точное значение интеграла $I = 7/32 = 0{,}21875$.

Результат имеет сравнительно небольшую точность потому, что число точек $N = 20$ недостаточно велико.

Второй способ. Если функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geqslant 0$, то интеграл (7.11) можно рассматривать как объем тела в $(m+1)$-мерном пространстве, т. е.

$$I = \int\int\limits_V \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_m\, dy, \tag{7.15}$$

где область интегрирования V определяется условиями

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in G, \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Если в области G

$$0 \leqslant f(x) \leqslant B, \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

то, введя новую переменную

$$\eta = \frac{1}{B} y,$$

получим

$$I = B \int\int\limits_v \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_m\, d\eta,$$

где область v лежит в единичном $(m+1)$-мерном кубе

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Возьмем $m+1$ равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных последовательностей

$$\begin{array}{llllll}
x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, & \ldots, \\
x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \ldots, & x_n^{(2)}, & \ldots, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & x_3^{(m)}, & \ldots, & x_n^{(m)}, & \ldots, \\
\eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \ldots, & \eta_n, & \ldots,
\end{array}$$

Составим соответствующую последовательность случайных точек

$$M_i(x_i^{(1)},\ x_i^{(2)},\ \ldots,\ x_i^{(m)},\ \eta_i) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Пусть из общего числа N случайных точек n точек принадлежат объему v, тогда имеет место приближенная формула

$$I \approx B \cdot \frac{n}{N}. \tag{7.16}$$

Пример 7.4. Вычислить приближенно объем, ограниченный поверхностями (рис. 3)

$$z = 2 + \sqrt{(0{,}5)^2 - (x-0{,}5)^2 - (y-0{,}5)^2},$$
$$(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2 = (0{,}5)^2, \quad z=0.$$

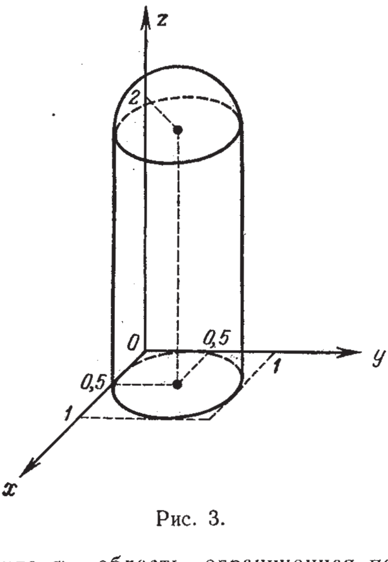

Рис. 3.

Решение. Искомый объем численно равен величине интеграла

$$I = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz. \tag{7.17}$$

Так как в области V

$$0 \leqslant z \leqslant 2{,}5,$$

вводим новую переменную

$$\eta = \frac{z}{2{,}5},$$

в результате чего интеграл (7.17) переходит в интеграл

$$I = 2{,}5 \iiint\limits_v dx\,dy\,d\eta, \tag{7.18}$$

где v — область, ограниченная поверхностями

$$(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2 = (0{,}5)^2,$$
$$\eta = 0{,}8 + 0{,}4\sqrt{(0{,}5)^2 - (x-0{,}5)^2 - (y-0{,}5)^2}, \qquad \eta = 0,$$

т. е. v принадлежит единичному кубу

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Берем теперь три равномерно распределенные на отрезке [0, 1] последовательности случайных чисел и записываем их в качестве координат x, y, η случайных точек в табл. 7.3 (например, в качестве координат x берем числа первых двух столбцов табл. 7.1, а в качестве y — числа последних двух столбцов). Затем проверяем, какие из этих точек принадлежат области v.

Таблица 7.3

Вычисление интеграла (7.18) методом Монте-Карло

i	x	y	$\lvert x-0,5\rvert$	$\lvert y-0,5\rvert$	$(x-0,5)^2+$ $+(y-0,5)^2$	ε_1	η	$\lvert\eta-0,8\rvert$	$6,25(\eta-0,8)^2$	ε_2	ε
1	0,577	0,116	0,077	0,384	0,147	1	0,667			1	1
2	0,716	0,930	0,216	0,430	0,232		0,993	0,193	0,231		0
3	0,737	0,930	0,237	0,430	0,241	1	0,242			1	1
4	0,701	0,428	0,201	0,072	0,045		0,940	0,140	0,122		1
5	0,170	0,529	0,330	0,029	0,110	1	0,610			1	1
6	0,533	0,095	0,033	0,405	0,165	1	0,131			1	1
7	0,432	0,996	0,068	0,496	0,251	0	0,352			1	0
8	0,263	0,699	0,237	0,199	0,096	1	0,645			1	1
9	0,059	0,313	0,441	0,187	0,229	1	0,646			1	1
10	0,663	0,270	0,163	0,230	0,080	1	0,680			1	1
11	0,355	0,653	0,145	0,153	0,046	1	0,577			1	1
12	0,094	0,934	0,406	0,434	0,353	0	0,716			1	0
13	0,303	0,058	0,197	0,442	0,234	1	0,737			1	1
14	0,552	0,003	0,052	0,497	0,250	1	0,701			1	1
15	0,640	0,882	0,140	0,382	0,165	1	0,169			1	1
16	0,205	0,986	0,295	0,486	0,323	0	0,533			1	0
17	0,002	0,521	0,498	0,021	0,248	1	0,432			1	1
18	0,557	0,918	0,057	0,418	0,178	1	0,263			1	1
19	0,870	0,071	0,370	0,429	0,318	0	0,059			1	0
20	0,313	0,139	0,187	0,361	0,185	1	0,663			1	1
											$n=15$

Порядок заполнения таблицы 7.3.

1) Выделяем точки, у которых $\eta \leqslant 0{,}8$, и полагаем для них $\varepsilon_2 = 1$.

2) Среди выделенных точек области v принадлежат те, для которых выполняется неравенство

$$(x-0{,}5)^2+(y-0{,}5)^2 \leqslant (0{,}5)^2.$$

Для этих точек $\varepsilon_1 = 1$, для остальных $\varepsilon_1 = 0$.

3) Вычисляем $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2$. Области v принадлежат те точки, для которых $\varepsilon = 1$.

4) Среди точек, у которых $0{,}8 < \eta < 1$, области v принадлежат те точки, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x-0{,}5)^2+(y-0{,}5)^2+6{,}25(\eta-0{,}8)^2 \leqslant (0{,}5)^2.$$

Для этих точек $\varepsilon = 1$.

В нашем примере общее число точек $N=20$, а число точек, принадлежащих области v, равно 15. По формуле (7.16) получаем

$$I \approx 2{,}5\,\frac{n}{N} = 2{,}5\,\frac{15}{20} = 1{,}875.$$

Точное значение объема V равно 1,833.

Замечание 1. Погрешность формулы (7.16) обратно пропорциональна корню квадратному из числа испытаний, т. е.

$$R = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Это означает, что для обеспечения большой точности число точек N должно быть очень велико. Но так как приближенные формулы (7.13), (7.16) не зависят от размерности интеграла, метод Монте-Карло оказывается выгодным при вычислении интегралов большой размерности.

Замечание 2. Трудности применения метода Монте-Карло связаны с получением последовательностей случайных (или псевдослучайных) чисел. В настоящее время разработаны методы получения таких чисел на ЭВМ (см., например, [49]). Можно также использовать готовые таблицы случайных чисел (см. [3], [15]).

ЗАДАЧИ

Методом повторного интегрирования, применяя различные квадратурные формулы, вычислить интегралы. В задачах 1—3 сравнить полученное значение с точным значением интеграла.

1. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 (x^2+2y)\,dx$ по формуле трапеций при $n_x = 4$, $n_y = 8$.

2. $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$ по формуле Симпсона при $n_x = n_y = 4$.

3. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dy}{1+y^2}$ по формуле Гаусса при $n_x = n_y = 4$.

4. $\int\limits_0^1\int\limits_1^2 \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+ax+by}\,dx\,dy$, $\quad a = 0{,}5+0{,}1\cdot n$, $\quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $b = 0{,}5+0{,}1\cdot k$, $\quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

5. $\int\limits_0^2\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{e^{-a(x+y)}}{1+b(x+y)}\,dx\,dy$, $a = 0{,}2\cdot n$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $b = 0{,}1\cdot k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

6. Интегралы в задачах 1—3 вычислить по формуле (7.9).

Вычислить интегралы, используя кубатурные формулы Люстерника—Диткина (7.7) и (7.8).

7. $\iint\limits_G \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$, где G—область $x^2+y^2 \leqslant 2x$.

8. $\iint\limits_G \frac{x^2y^2\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, где G — область $x^2+y^2 \leqslant 4$.

9. $\iint\limits_G \frac{(1+x)\,dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, где G — правильный шестиугольник, вписанный в единичный круг.

10. $\iint\limits_G \frac{x^2}{\sqrt{2-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}}\,dx\,dy$, где G — область $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leqslant 1$.

Вычислить интегралы методом Монте-Карло.

11. $\iint\limits_G \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$, где G — треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.

12. $\iint\limits_G e^{x/y}\,dx\,dy$, где G — криволинейный треугольник, ограниченный параболой $y^2=x$ и прямыми $x=0$, $y=1$.

13. $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, где G — область интегрирования, ограниченная координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$.

14. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z=0$, поверхностью $z=e^{-(x^2+y^2)}$ и цилиндром $x^2+y^2=1$.

ГЛАВА VIII

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Задача Коши. Общие замечания

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}=f(x, \quad y, y', \ldots, \quad y^{(n-1)}) \tag{1.1}$$

заключается в отыскании функции $y=y(x)$, удовлетворяющей этому уравнению и начальным условиям

$$y(x_0)=y_0, \ y'(x_0)=y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{1.2}$$

где $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx}&=f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
\frac{dy_2}{dx}&=f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy_n}{dx}&=f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

заключается в отыскании функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих этой системе и начальным условиям

$$y_1(x_0)=y_{10}, \ y_2(x_0)=y_{20}, \ \ldots, \ y_n(x_0)=y_{n0}. \tag{1.4}$$

Систему, содержащую производные высших порядков и разрешенную относительно старших производных искомых функций, путем введения новых неизвестных функций можно привести к виду (1.3). В частности, дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

приводится к виду (1.3) с помощью замены

$$y_1=y', \quad y_2=y'', \quad \ldots, \quad y_{n-1}=y^{(n-1)},$$

что дает следующую систему:

$$\frac{dy}{dx}=y_1,$$
$$\frac{dy_1}{dx}=y_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1},$$
$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=f(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}).$$

Если удается найти общее решение уравнения (1.1) или системы (1.3), то задача Коши сводится к отысканию значений произвольных постоянных. Но найти общее решение задачи Коши удается в редких случаях; чаще всего приходится решать задачу Коши приближенно.

Приближенные методы в зависимости от формы, в которой они представляют решение, можно разделить на две группы.

1. *Аналитические методы*, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения.

2. *Численные методы*, дающие приближенное решение в виде таблицы. В дальнейшем изложении предполагается, что для рассматриваемых уравнений выполнены условия существования и единственности решения.

§ 2. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

1. Метод последовательного дифференцирования. Рассмотрим уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2). Предположим, что искомое частное решение $y=y(x)$ может быть разложено в ряд Тейлора по степеням разности $x-x_0$:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (2.1)$$

Начальные условия (1.2) непосредственно дают нам значения $y^{(k)}(x_0)$ при $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Значение $y^{(n)}(x_0)$ найдем из уравнения (1.1), подставляя $x=x_0$ и используя начальные условия (1.2):

$$y^{(n)}(x_0)=f(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}). \qquad (2.2)$$

Значения $y^{(n+1)}(x_0)$, $y^{(n+2)}(x_0)$, ... последовательно определяются дифференцированием уравнения (1.1) и подстановкой $x=x_0$, $y^{(k)}(x_0)=y_{0k}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Доказано, что если правая часть уравнения (1.1) в окрестности точки $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$, есть аналитическая функция своих аргументов, то при значениях x, достаточно близких к x_0, существует единственное решение задачи Коши (1.1), (1.2), которое разлагается в ряд Тейлора (2.1). Тогда частичная сумма этого ряда будет приближенным решением поставленной задачи.

Аналогично применяется метод последовательного дифференцирования и для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 2.1. Найти первые семь членов разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ уравнения

$$y''+0{,}1(y')^2+(1+0{,}1x)y=0,$$

с начальными условиями $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Решение. Решение уравнения ищем в виде ряда

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Непосредственно из начальных условий имеем $y(0)=1$, $y'(0)=2$. Для определения $y''(0)$ разрешим данное уравнение относительно y'':

$$y''=-0{,}1(y')^2-(1+0{,}1x)y. \tag{2.3}$$

Используя начальные условия, получим

$$y''(0)=-0{,}1\cdot 4-1\cdot 1=-1{,}4.$$

Дифференцируем теперь последовательно по x левую и правую части уравнения (2.3):

$$\begin{aligned}
y'''&=-0{,}2y'y''-0{,}1(xy'+y)-y',\\
y^{(4)}&=-0{,}2\left(y'y'''+y''^2\right)-0{,}1(xy''+2y')-y'',\\
y^{(5)}&=-0{,}2(y'y^{(4)}+3y''y''')-0{,}1(xy'''+3y'')-y''',\\
y^{(6)}&=-0{,}2\left(y'y^{(5)}+4y''y^{(4)}+3y'''^2\right)-0{,}1(xy^{(4)}+4y''')-y^{(4)}.
\end{aligned}$$

Подставляя начальные условия и значение $y''(0)$, находим

$$y'''(0)=-1{,}54,\quad y^{(4)}(0)=1{,}224,\quad y^{(5)}(0)=0{,}1768,$$
$$y^{(6)}(0)=-0{,}7308.$$

Таким образом, искомое приближенное решение запишется в виде

$$y(x)\approx 1+2x-0{,}7x^2-0{,}2567x^3+0{,}051x^4+0{,}00147x^5-0{,}00101x^6.$$

Пример 2.2. Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$, $z=z(x)$ системы

$$\left.\begin{aligned}
y'(x)&=y\cos x-z\sin x,\\
z'(x)&=y\sin x+z\cos x
\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

с начальными условиями $y(0)=1$, $z(0)=0$.

Решение. Функции $y(x)$ и $z(x)$ ищем в виде степенных рядов

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots, \tag{2.5}$$

$$z(x)=z(0)+\frac{z'(0)}{1!}x+\frac{z''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{z^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots \tag{2.6}$$

Непосредственно из начальных условий имеем $y(0)=1$, $z(0)=0$. Положив $x=0$ в системе (2.4) и учитывая начальные условия, получим

$$y'(0)=1,\qquad z'(0)=0.$$

Продифференцируем систему (2.4) по x:

$$\left.\begin{aligned} y''(x) &= -(y+z')\sin x-(z-y')\cos x, \\ z''(x) &= -(z-y')\sin x+(y+z')\cos x. \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Отсюда находим

$$y''(0)=1, \qquad z''(0)=1.$$

Продифференцируем систему (2.7):

$$\left.\begin{aligned} y'''(x) &= (z-2y'-z'')\sin x-(y+2z'-y'')\cos x, \\ z'''(x) &= -(y+2z'-y'')\sin x-(z-2y'-z'')\cos x. \end{aligned}\right\}$$

Получаем $y'''(0)=0$, $z'''(0)=3$. Подставив найденные значения производных в ряды (2.5), (2.6), можем написать

$$y(x)\approx 1+x+\frac{1}{2}x^2, \qquad z(x)\approx\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3.$$

Замечание. Для некоторых численных методов интегрирования дифференциальных уравнений требуется определить значения искомых функций в нескольких точках. Эти значения могут быть подсчитаны с помощью степенных рядов. Таким образом, метод разложения решений в степенные ряды может быть использован как элемент более эффективных численных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений (метод Адамса, метод Милна и др.). Ниже приведен пример составления таблицы решения с определенным шагом.

Если уравнение содержит особенность, например неопределенность типа $\frac{0}{0}$, то численное решение невозможно. Тогда использование степенных рядов дает возможность «отодвинуться» от особенности (см. задачи 11—13).

Пример 2.3. Для функции $y=y(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$y''+xy'+y=0 \qquad (2.8)$$

и начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$, составить таблицу значений на отрезке $[0;\,0{,}2]$ с шагом $h=0{,}05$. Решение получить с погрешностью, не превышающей $0{,}5\cdot10^{-4}$.

Решение. Запишем функцию $y=y(x)$ в виде ряда

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,$$

где $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Из уравнения (2.8) получаем

$$y''=-xy'-y.$$

Отсюда $y''(0)=-y(0)=0$.

Дифференцируя последовательно уравнение (2.8), будем иметь

$$\begin{aligned} y'''(x) &= -xy''-2y', \\ y^{(4)}(x) &= -xy'''-3y'', \\ y^{(5)}(x) &= -xy^{(4)}-4y''', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

и вообще $y^{(n+1)}(x)=-xy^{(n)}-ny^{(n-1)}$. Из этих равенств получаем

$$y'''(0)=-2, \quad y^{(4)}(0)=0, \quad y^{(5)}(0)=8.$$

И вообще

$$y^{(2n)}(0)=0, \quad y^{(2n+1)}(0)=-2ny^{(2n-1)}(0)=(-1)^n 2^n n!.$$

Отсюда

$$y(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}-\ldots+(-1)^n\frac{2^n n!\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

Этот ряд является знакочередующимся, и его члены монотонно убывают по абсолютной величине на отрезке [0; 0,2]. Так как остаток такого ряда по абсолютной величине меньше первого отбрасываемого члена, то приближенная формула

$$y(x)\approx x-\frac{x^3}{3}$$

будет давать значения искомой функции на отрезке [0; 0,2] с погрешностью, меньшей чем

$$\frac{x^5}{15}\leqslant\frac{(0,2)^5}{15}\approx 0,00002.$$

Пользуясь полученной формулой, составляем табл. 2.1.

Таблица 2.1

Решение уравнения (2.8)

x	0	0,05	0,10	0,15	0,20
$y(x)$	0	0,0500	0,0997	0,1489	0,1973

2. Метод неопределенных коэффициентов. Этот метод рекомендуется применять при решении *линейных* дифференциальных уравнений (с переменными коэффициентами). Суть метода покажем на примере уравнения второго порядка

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \tag{2.9}$$

с начальными условиями $y(0)=y_0$, $y'(0)=y'_0$. Предположим, что каждый из коэффициентов уравнения (2.9) можно разложить в ряд по степеням x:

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n, \qquad q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n, \qquad r(x)=\sum_{n=0}^{\infty}r_n x^n.$$

Решение данного уравнения будем искать в виде ряда

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n, \tag{2.10}$$

где c_n — коэффициенты, подлежащие определению.

Дифференцируем обе части равенства (2.10) два раза по x:

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}, \qquad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}.$$

Подставляя полученные ряды для y, y', y'', p, q, r в уравнение (2.9), получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n. \tag{2.11}$$

Произведя умножение рядов и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и в правой частях тождества (2.11), получим систему

$$\left.\begin{array}{l|l} x^0 & 2c_2+c_1p_0+c_0q_0=r_0, \\ x^1 & 3\cdot 2c_3+2c_2p_0+c_1p_1+c_1q_0+c_0q_1=r_1, \\ x^2 & 4\cdot 3c_4+3c_3p_0+2c_2p_1+c_1p_2+c_2q_0+c_1q_1+c_0q_2=r_2, \\ \cdot & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n & (n+2)(n+1)c_{n+2}+L(c_{n+1},\ c_n,\ \dots,\ c_1,\ c_0)=q_n, \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

где $L(c_{n+1},\ c_n,\ \dots,\ c_1,\ c_0)$ означает линейную функцию аргументов $c_0,\ c_1,\ \dots,\ c_n,\ c_{n+1}$.

Каждое уравнение системы (2.12) содержит на одно неизвестное больше по сравнению с предыдущим уравнением. Коэффициенты c_0, c_1 определяются из начальных условий, а все остальные последовательно определяются из системы (2.12). Доказано, что если ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n x^n$ сходятся при $|x|<R$, то полученный степенной ряд сходится в той же области и является решением уравнения (2.9).

Замечание. Если начальные условия заданы при $x=x_0$, то рекомендуется сделать замену $x-x_0=t$, после чего задача сводится к рассмотренной выше.

Пример 2.4. Найти решение уравнения

$$y''-xy'+y=1-\cos x, \tag{2.13}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Решение. Разложим коэффициенты данного уравнения в степенные ряды

$$p(x)=-x, \quad q(x)=1, \quad r(x)=1-\cos x=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\dots$$

Будем искать решение уравнения (2.13) в виде ряда

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\dots+c_nx^n+\dots$$

Тогда

$$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\dots+nc_nx^{n-1}+\dots,$$
$$y''=2c_2+6c_3x+12c_4x^2+\dots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\dots$$

Подставив полученные ряды в уравнение (2.13) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему для определения коэффициентов c_i:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & c_0+2c_2=0, \\ x^1 & 6c_3=0, \\ x^2 & -c_2+12c_4=\frac{1}{2}, \\ x^3 & -2c_3+20c_5=0, \\ x^4 & -3c_4+30c_6=-\frac{1}{24}, \\ x^5 & -4c_5+42c_7=0, \\ x^6 & -5c_6+56c_8=\frac{1}{720}. \end{array}$$

Из начальных условий находим $c_0=0$, $c_1=1$.

Легко заметить, что $c_{2n+1}=0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Далее,

$$c_2=0, \quad c_4=\frac{1}{24}, \quad c_6=\frac{1}{360}, \quad c_8=\frac{11}{40\,320}.$$

Таким образом, получаем приближенное решение задачи в виде

$$y(x)\approx x+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{360}+\frac{11x^8}{40\,320}.$$

Замечание. Иногда при решении дифференциального уравнения методом неопределенных коэффициентов удается найти выражение для коэффициентов ряда в общем виде. Это показано в следующем примере.

Пример 2.5. Найти решение уравнения

$$y''+xy'+2y=12, \tag{2.14}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=5$, $y'(0)=2$, в виде ряда по степеням x.

Решение. Будем искать решение в виде ряда

$$y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

Тогда

$$y'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots,$$
$$y''(x)=2c_2+2\cdot 3c_3x+\ldots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\ldots$$

Подставив полученные ряды в уравнение (2.14) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения, получим систему

$$\left.\begin{array}{l|l} x^0 & 2c_2+2c_0=12, \\ x^1 & 3\cdot 2c_3+3c_1=0, \\ x^2 & 4\cdot 3c_4+4c_2=0, \\ x^3 & 5\cdot 4c_5+5c_3=0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n & (n+1)(n+2)c_{n+2}+(n+2)c_n=0. \end{array}\right\} \tag{2.15}$$

Из начальных условий имеем $c_0=5$, $c_1=2$.

Решая систему (2.15), последовательно находим

$$c_2 = 6 - c_0 = 1, \qquad c_5 = -\frac{c_3}{4},$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{2} = -1, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{3}, \qquad c_{n+2} = -\frac{c_n}{n+1}.$$

Выпишем отдельно коэффициенты с нечетными и четными номерами:

$$c_3 = -\frac{c_1}{2}, \qquad c_4 = -\frac{c_2}{3},$$

$$c_5 = -\frac{c_3}{4}, \qquad c_6 = -\frac{c_4}{5},$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$c_{2k+1} = -\frac{c_{2k-1}}{2k}, \qquad c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2k-1}.$$

Отсюда получаем

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{2\cdot 4\ldots 2k}, \qquad c_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} c_2}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2k-1)}.$$

Подставим значения c_1 и c_2; тогда

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k\cdot 2}{(2k)!!}, \qquad c_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Запишем два ряда по четным и по нечетным степеням x:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} x^{2k}, \qquad 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!!} x^{2k+1}.$$

Найдем область сходимости полученных рядов.

Для первого ряда предел модуля отношения последующего члена к предыдущему равен

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+2}\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{3\cdot 5\ldots(2k-1)(2k+1)x^{2k}}\right| = x^2\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1} = 0.$$

Для второго ряда аналогично

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+3}\, 2\cdot 4\ldots 2k}{2\cdot 4\ldots 2k(2k+2)x^{2k+1}}\right| = x^2\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+2} = 0.$$

Таким образом, оба ряда сходятся на всей числовой оси, поэтому решение уравнения (2.14) можно записать в виде

$$y(x) = 5 + 2x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}x^{2k} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!!}x^{2k+1}.$$

ЗАДАЧИ

Применяя метод последовательного дифференцирования, найти решения уравнений и систем, удовлетворяющие данным начальным условиям, в виде частичной суммы ряда (ограничиться четырьмя-пятью членами).

1. $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 1/2$. **2.** $y' = \cos(x+y)$, $y(0) = 0$.

3. $y' = e^y + x^2$, $y(1) = 0$. **4.** $y' = x \ln y$, $y(1) = 1$.

5. $y'' + y \cos x = 0$, $y(0) = a$, $y'(0) = 0$.

6. $y'' + xy' = e^{-x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

7. $\left.\begin{aligned} y' &= xy + z, \\ z' &= y - z, \end{aligned}\right\}$ $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

8. $\left.\begin{aligned} y' &= x + z^2, \\ z' &= xy, \end{aligned}\right\}$ $y(0) = 1$, $z(0) = -1$.

Найти решения уравнений, применяя метод неопределенных коэффициентов.

9. $y'' + y' + x^2 y = \frac{x}{1-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

10. $y'' - xy' - 2y = e^{-x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/2$.

11. $4xy'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1/2$.

12. $xy'' + y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

13. $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

14. Составить таблицу значений решения на отрезке $[0; 0{,}15]$ с шагом $h = 0{,}05$, используя полученную частичную сумму ряда: а) для уравнения 1, б) для системы 7, в) для системы 8.

§ 3. Метод последовательных приближений

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{3.2}$$

Метод последовательных приближений состоит в том, что решение $y(x)$ получают как предел последовательности функций $y_n(x)$, которые находятся по рекуррентной формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\, dx. \tag{3.3}$$

Доказано (см. [36]), что если правая часть $f(x, y)$ в некотором замкнутом прямоугольнике $R\{|x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$ удовлетворяет условию Липшица по y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|,\ N = \text{const}, \tag{3.4}$$

то независимо от выбора начальной функции последовательные приближения $y_n(x)$ сходятся на некотором отрезке $[x_0, x_0+h]$ к решению задачи (3.1), (3.2).

Если $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R, то оценка погрешности приближенного решения $y_n(x)$ на отрезке $[x_0, x_0+h]$ дается неравенством

$$\varepsilon_n = |y(x) - y_n(x)| \leqslant MN^n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{3.5}$$

где $M = \max\limits_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$, а число h определяется из условия

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \tag{3.6}$$

В качестве начального приближения $y_0(x)$ можно взять любую функцию, достаточно близкую к точному решению. Иногда, например, выгодно в качестве $y_0(x)$ брать приближенное решение уравнения (3.1), полученное в виде частичной суммы степенного ряда (пример 3.2).

Замечание. Метод последовательных приближений применим и для решения системы дифференциальных уравнений (пример 3.3), а также для решения дифференциального уравнения n-го порядка, если его записать в виде системы. Мы видели, что для разложения решения дифференциального уравнения в степенной ряд требуется аналитичность правой части уравнения, при пользовании методом последовательных приближений аналитичность правой части не обязательна. Поэтому область применения метода последовательных приближений является, вообще говоря, более широкой: он применим и в тех случаях, когда разложение решения дифференциального уравнения в степенной ряд невозможно. Однако недостатком метода последовательных приближений является необходимость вычисления все более громоздких интегралов.

Пример 3.1. Найти три последовательных приближения решения уравнения

$$y' = x^2 + y^2 \tag{3.7}$$

с начальным условием $y(0) = 0$.

Решение. Учитывая начальное условие, заменим уравнение (3.7) интегральным

$$y(x) = \int_0^x (x^2 + y^2)\, dx.$$

В качестве начального приближения возьмем $y_0(x) \equiv 0$. Первое приближение находим по формуле

$$y_1(x) = \int_0^x (x^2 + y_0^2(x))\, dx = \int_0^x x^2\, dx = \frac{x^3}{3}.$$

Аналогично получаем второе и третье приближения:

$$y_2(x)=\int_0^x (x^2+y_1^2)\,dx=\int_0^x \left(x^2+\frac{x^6}{9}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x)=\int_0^x (x^2+y_2^2)\,dx=\int_0^x \left(x^2+\frac{x^6}{9}+\frac{2}{189}x^{10}+\frac{x^{14}}{3969}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59\,535}.$$

Оценим погрешность последнего приближения по формуле (3.5). Так как функция $f(x,\ y)=x^2+y^2$ определена и непрерывна во всей плоскости, то в качестве a и b можно взять любые числа. Возьмем для определенности $a=1$, $b=0{,}5$. Тогда будем иметь

$$M=\max|f(x,\ y)|=\max|x^2+y^2|=1{,}25,$$
$$N=\max|f'_y(x,\ y)|=\max|2y|=1.$$

Согласно условию (3.6) выбираем $h=0{,}4$.

Таким образом, на отрезке $[0;\ 0{,}4]$ получаем

$$|y(x)-y_3(x)|\leqslant 1{,}25\cdot 1^3\cdot\frac{x^4}{4!}=\frac{5}{96}x^4,$$

и, следовательно,

$$\max_{[0;\ 0,4]}|y(x)-y_3(x)|\leqslant\frac{5\cdot(0{,}4)^4}{96}\approx 0{,}00133.$$

З а м е ч а н и е. Оценка погрешности по формуле (3.5) часто оказывается завышенной. Практически, применяя метод последовательных приближений, останавливаются на таком n, для которого значения y_{n-1}, y_n совпадают в пределах допустимой точности (см. пример 3.2).

П р и м е р 3.2. Для уравнения

$$y'=x+0{,}1y^2 \tag{3.8}$$

с начальным условием $y(0)=1$ найти приближенное решение на отрезке $[0;\ 0{,}2]$ с точностью до 10^{-5}.

Р е ш е н и е. Выберем начальное приближение $y_0(x)$ в виде

$$y_0(x)=y_0+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2.$$

Для этого из уравнения (3.8) и начального условия определяем

$$y_0=1,$$
$$y'(0)=0{,}1y_0^2=0{,}1,$$
$$y''(0)=1+0{,}2y_0y'_0=1{,}02.$$

Таким образом, $y_0(x)=1+0{,}1x+0{,}51x^2$.

Находим

$$f(x,\ y_0)=x+0{,}1y_0^2=0{,}1+1{,}02x+0{,}103x^2+0{,}0102x^3+0{,}0260x^4$$

и вычисляем первое приближение

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x + 0{,}1y_0^2)\,dx =$$
$$= 1 + 0{,}1x + 0{,}51x^2 + 0{,}034x^3 + 0{,}0025x^4 + 0{,}0052x^5.$$

Рассмотрим разность $y_1(x) - y_0(x) = 0{,}034x^3 + 0{,}0025x^4 + 0{,}0052x^5$. При $x = 0{,}2$ она имеет максимальное значение

$$\max_{[0;\ 0,2]} |y_1(x) - y_0(x)| = 0{,}00028 > 10^{-5},$$

следовательно, заданная точность еще не достигнута. Заметим, что в выражении для y_1 два последних слагаемых не превышают в сумме 10^{-5}, поэтому можем принять

$$y_1(x) = 1 + 0{,}1x + 0{,}51x^2 + 0{,}034x^3.$$

Находим

$$f(x, y_1) = x + 0{,}1y_1^2 = 0{,}1 + 1{,}02x + 0{,}103x^2 + 0{,}0170x^3 + 0{,}0267x^4 + $$
$$+ 0{,}0017x^5 + 0{,}0001x^6$$

и вычисляем второе приближение

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (x + 0{,}1y_1^2)\,dx =$$
$$= 1 + 0{,}1x + 0{,}51x^2 + 0{,}034x^3 + 0{,}0042x^4 + 0{,}0053x^5.$$

Оценим разность $y_2(x) - y_1(x)$ на отрезке $[0;\ 0{,}2]$:

$$|y_2(x) - y_1(x)| = 0{,}0042x^4 + 0{,}0053x^5 < 0{,}000008 < 10^{-5}.$$

Таким образом, получаем

$$y(x) \approx 1 + 0{,}1x + 0{,}51x^2 + 0{,}034x^3 + 0{,}0042x^4 + 0{,}0053x^5.$$

Пример 3.3. Дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x + yz, \\ \frac{dz}{dx} &= x^2 - y^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

с начальными условиями $y(0) = 1$, $z(0) = 1/2$. Методом последовательных приближений найти решение этой системы на отрезке $[0;\ 0{,}3]$ с точностью до $5 \cdot 10^{-3}$.

Решение. Записываем систему (3.9) в интегральной форме:

$$y = 1 + \int_0^x (x + yz)\,dx, \qquad z = \frac{1}{2} + \int_0^x (x^2 - y^2)\,dx.$$

Используя начальные значения, из системы (3.9) находим $y'(0) = 1/2$,

$z'(0) = -1$, поэтому в качестве начальных приближений выберем

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{2}x, \qquad z_0(x) = \frac{1}{2} - x.$$

Вычисляем следующие приближения $y_1(x)$ и $z_1(x)$:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x \left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{6}x^3,$$

$$z_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left(x^2 - 1 - x - \frac{1}{4}x^2\right) dx = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3.$$

Аналогично получаем

$$y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 - \frac{5}{96}x^4 + \frac{11}{240}x^5 + \frac{11}{576}x^6 - \frac{1}{168}x^7,$$

$$z_2(x) = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{96}x^4 + \frac{29}{960}x^5 + \frac{1}{144}x^6 - \frac{1}{252}x^7.$$

Оценим разности $y_1(x) - y_2(x)$ и $z_1(x) - z_2(x)$ на отрезке $[0; 0{,}3]$:

$$|y_1(x) - y_2(x)| = \left|-\frac{7}{48}x^3 - \frac{5}{96}x^4 + \frac{11}{240}x^5 + \frac{11}{576}x^6 - \frac{1}{168}x^7\right| \leqslant$$
$$\leqslant x^3 \left|\frac{7}{48} + \frac{5}{96}x + \frac{1}{168}x^4\right| \leqslant 0{,}0043,$$

$$|z_1(x) - z_2(x)| = \left|\frac{1}{12}x^3 - \frac{5}{96}x^4 - \frac{29}{960}x^5 - \frac{1}{144}x^6 - \frac{1}{252}x^7\right| \leqslant$$
$$\leqslant x^3 \left|\frac{1}{12} + \frac{1}{252}x^4\right| \leqslant 0{,}0024.$$

Эти разности находятся в пределах заданной точности, причем члены, содержащие x^4, x^5, x^6, малы на отрезке $[0; 0{,}3]$. Следовательно, с заданной точностью можно положить

$$y \approx 1 + 0{,}5x + 0{,}125x^2 - 0{,}312x^3, \quad z \approx 0{,}5 - x - 0{,}5x^2 + 0{,}167x^3.$$

ЗАДАЧИ

Найти три последовательных приближения решений следующих дифференциальных уравнений и систем, полагая $y_0(x) \equiv y_0$, $z_0(x) \equiv z_0$.

1. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0$. **2.** $y' = e^{-x} - y^2$, $y(0) = 1$.

3. $y' = 2x - 1 + y^2$, $y(0) = 1$. **4.** $y' = \sqrt{x} + y^2$, $y(0) = 0$.

5. $y' = xy + \sqrt{x}$, $y(0) = 0$. **6.** $y' = y \sin x + x$, $y(0) = 0$.

7. $y' = x + y \cos x$, $y(0) = 0$.

8. $\left.\begin{aligned} y' &= x + y + z, \\ z' &= y - z, \end{aligned}\right\}$ $y(0) = 1$, $z(0) = -2$.

9. $\left.\begin{aligned} y' &= xy + z, \\ z' &= y + xz, \end{aligned}\right\}$ $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

10. $\left.\begin{aligned} y' &= x - z^2, \\ z' &= x + y, \end{aligned}\right\}$ $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

11. $\left.\begin{aligned} y' &= y - z, \\ z' &= yz, \end{aligned}\right\} \; y(0) = 0, \; z(0) = 0{,}5.$

12. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$. 13. $y' = x + y$, $y(0) = 1$.

14. $y' = 2y - 2x^2 - 3$, $y(0) = 2$. 15. $xy' = 2x - y$, $y(1) = 2$.

Методом последовательных приближений найти приближенные решения следующих дифференциальных уравнений на отрезке $[0, 1]$ с точностью до 10^{-3}, полагая $y_0(x) \equiv y_0$.

16. $y' = 2x - 0{,}01y^2$, $y(0) = 1$. 17. $y' = 4{,}5x + 0{,}1y^2$, $y(0) = 0$.

18. $y' = x + y\sqrt{x}$, $y(0) = 0$.

§ 4. Метод Эйлера

В предыдущих параграфах были рассмотрены аналитические приближенные методы решения задачи Коши. Метод Эйлера относится к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{4.2}$$

Выбрав достаточно малый шаг h, построим систему равноотстоящих точек $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

В методе Эйлера приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ вычисляются последовательно по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.3}$$

При этом искомая интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1M_2\ldots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$; каждое звено M_iM_{i+1} этой ломаной, называемой *ломаной Эйлера*, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения (4.1), которая проходит через точку M_i.

Если правая часть уравнения (4.1) в некотором прямоугольнике $R\{|x - x_0| \leqslant a, \; |y - y_0| \leqslant b\}$ удовлетворяет условиям

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2| \quad (N = \text{const}), \tag{4.4}$$

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M \quad (M = \text{const}), \tag{4.5}$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n) - y_n| \leqslant \frac{hM}{2N}\left[(1 + hN)^n - 1\right], \tag{4.6}$$

где $y(x_n)$ — значение точного решения уравнения при $x = x_n$, а y_n — приближенное значение, полученное на n-м шаге.

Формула (4.5) имеет лишь теоретическое применение. На практике иногда оказывается более удобным *двойной просчет*: расчет повторяют с шагом $h/2$ и погрешность более точного значения y_n^* (при шаге $h/2$) оценивают приближенно так:

$$|y_n^*-y(x_n)|\approx|y_n^*-y_n|. \tag{4.7}$$

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений и на дифференциальные уравнения высших порядков. Последние должны быть предварительно приведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка (пример 4.2).

Рассмотрим систему двух уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} y'&=f_1(x,\ y,\ z),\\ z'&=f_2(x,\ y,\ z)\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

с начальными условиями $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$.

Приближенные значения $y(x_i)\approx y_i$ и $z(x_i)=z_i$ вычисляются последовательно по формулам

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1}&=y_i+hf_1(x_i,\ y_i,\ z_i),\\ z_{i+1}&=z_i+hf_2(x_i,\ y_i,\ z_i)\ \ (i=0,1,2,\ \ldots).\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Пример 4.1. Применяя метод Эйлера, составить на отрезке [0, 1] таблицу значений решения уравнения

$$y'=y-\frac{2x}{y} \tag{4.10}$$

с начальным условием $y(0)=1$, выбрав шаг $h=0{,}2$.

Решение. Результаты вычислений приведены в табл. 4.1. Заполняется она следующим образом. В первой строке при $i=0$

Таблица 4.1

Решение дифференциального уравнения (4.10) методом Эйлера

i	x_i	y_i	Вычисление $f(x_i,\ y_i)$		Δy_i	Точное решение $y=\sqrt{2x+1}$
			$\frac{2x_i}{y_i}$	$y_i-\frac{2x_i}{y_i}$		
0	0	1,0000	0	1,0000	0,2000	1,0000
1	0,2	1,2000	0,3333	0,8667	0,1733	1,1832
2	0,4	1,3733	0,5928	0,7805	0,1561	1,3416
3	0,6	1,5294	0,7846	0,7458	0,1492	1,4832
4	0,8	1,6786	0,9532	0,7254	0,1451	1,6124
5	1,0	1,8237				1,7320

записываются начальные значения $x_0=0$, $y_0=1{,}0000$, и по ним вычисляется $f(x_0,\ y_0)=1$, а затем $\Delta y_0=hf(x_0,\ y_0)=0{,}2$. Тогда по формуле (4.4) при $i=0$ получаем

$$y_1=1+0{,}2=1{,}2.$$

Значения $x_1=0{,}2$, $y_1=1{,}2000$ записываются во второй строке при $i=1$. Используя их, можно вычислить $f(x_1,\ y_1)=0{,}8667$, затем $\Delta y_1=hf(x_1,\ y_1)=0{,}2\cdot 0{,}8667=0{,}1733$. Таким образом, получаем

$$y_2=y_1+\Delta y_1=1{,}2+0{,}1733=1{,}3733.$$

При $i=2, 3, 4, 5$ вычисления ведутся аналогично.

В последнем столбце таблицы для сравнения помещены значения точного решения $y=\sqrt{2x+1}$. Из таблицы видно, что абсолютная погрешность y_5 составляет $\varepsilon=0{,}0917$, т. е. относительная погрешность составляет 5%.

Пример 4.2. Применяя метод Эйлера, составить на отрезке [1; 1,5] таблицу значений решения уравнения

$$y''+\frac{y'}{x}+y=0 \tag{4.11}$$

с начальными условиями $y(1)=0{,}77$, $y'(1)=-0{,}44$, выбрав шаг $h=0{,}1$.

Решение. С помощью подстановки $y'=z$, $y''=z'$ заменим уравнение (4.11) системой уравнений

$$y'=z, \quad z'=-\frac{z}{x}-y$$

с начальными условиями $y(1)=0{,}77$, $z(1)=-0{,}44$. Таким образом, $f_1(x,\ y,\ z)=z$, $f_2(x,\ y,\ z)=-\frac{z}{x}-y$. Результаты вычислений по формулам (4.9) записаны в табл. 4.2 (расчеты ведутся с одним запасным знаком). Заполнение таблицы производится следующим

Таблица 4.2

Решение уравнения (4.11) методом Эйлера

i	x_i	y_i	Δy_i	$f_{1i}=z_i$	Δz_i	$f_{2i}=-\frac{z_i}{x_i}-y_i$
0	1,0	0,77	—0,044	—0,44	—0,033	—0,33
1	1,1	0,726	—0,047	—0,473	—0,030	—0,296
2	1,2	0,679	—0,050	—0,503	—0,026	—0,260
3	1,3	0,629	—0,053	—0,529	—0,022	—0,222
4	1,4	0,576	—0,055	—0,551		
5	1,5	0,521				

образом. Записываем в первой строке $i=0$, $x_0=1{,}0$, $y_0=0{,}77$, $z_0=-0{,}44$. Далее находим

$$f_{10}=f_1(x_0,\ y_0,\ z_0)=z_0=-0{,}44,$$

$$f_{20}=f_2(x_0,\ y_0,\ z_0)=-\frac{z_0}{x_0}-y_0=-0{,}33.$$

Используя формулы (4.9), получаем

$$\Delta y_0 = hf_{10} = 0,1\,(-0,44) = -0,044, \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0,726,$$
$$\Delta z_0 = hf_{20} = 0,1\,(-0,33) = -0,033, \quad z_1 = z_0 + \Delta z_0 = -0,473.$$

Таким образом, во второй строке таблицы можем записать $i = 1$, $x_1 = 1,1$, $y_1 = 0,726$, $z_1 = -0,473$. По этим значениям находим

$$f_{11} = f_1(x_1,\ y_1,\ z_1) = z_1 = -0,473,$$
$$f_{21} = f_2(x_1,\ y_1,\ z_1) = -\frac{z_1}{x_1} - y_1 = -0,296.$$

И следовательно,

$$\Delta y_1 = hf_{11} = 0,1\,(-0,47) = -0,047, \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0,679,$$
$$\Delta z_1 = hf_{21} = 0,1\,(-0,30) = -0,030, \quad z_2 = z_1 + \Delta z_1 = -0,503.$$

Заполнение таблицы при $i = 2,\ 3,\ 4,\ 5$ производится аналогично.

ЗАДАЧИ

Применяя метод Эйлера, численно решить данные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений с данными начальными условиями на отрезке $[a,\ b]$ с шагом $h = 0,1$ при указанных значениях параметров.

1. $y' = \frac{1}{2}xy,\ y(0) = 1,\ a = 0,\ b = 1.$

2. $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 0,\ a = 0,\ b = 1.$

3. $y' = 1 + xy^2,\ y(0) = 0,\ a = 0,\ b = 1.$

4. $y' = \frac{y}{x+1} - y^2,\ y(0) = 1,\ a = 0,\ b = 1.$

5. $y' = \alpha y^2 + \frac{\beta}{x^2},\ y(1) = 1,\ a = 1,\ b = 2.$

а) $\alpha = -1,\ \beta = 0,05 + 0,05\cdot k,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 7,$

б) $\alpha = -0,5,\ \beta = 0,1 + 0,1\cdot k,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

6. $y' = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{y}{x} - \beta y^2,\ y(1) = \gamma,\ a = 1,\ b = 2.$

Значения параметров α, β, γ даны в табл. 4.3.

7. $y' = 1 + \alpha y \sin x - \beta y^2,\quad y(0) = 0,\quad a = 0,\quad b = 1,\quad \alpha = 0,2\cdot k,$ $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5,\ \beta = 1 + 0,25\cdot n,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

8. а) $\left.\begin{aligned} y' &= -xz, \\ z' &= \frac{y}{x}, \end{aligned}\right\}\ y(0) = 0,\ z(0) = 1,\ a = 0,\ b = 1.$

б) $\left.\begin{aligned} y' &= (z - y)\,x, \\ z' &= (z + y)\,x, \end{aligned}\right\}\ y(0) = 1,\ z(0) = 1,\ a = 0,\ b = 1.$

9. $\left.\begin{aligned} y' &= -yz + \frac{\sin x}{x}, \\ z' &= -z^2 + \frac{\alpha x}{1+x^2}, \end{aligned}\right\}\ y(0) = 0,\ z(0) = -0,4122,\ a = 0,\ b = 1,$

$\alpha = 2,5 + \frac{\beta}{40},\ \beta = 25,\ 26,\ \ldots,\ 48.$

10. $\left.\begin{aligned} y' &= z - (\alpha y + \beta z)\,y, \\ z' &= e^y - (y + \alpha z)\,y, \end{aligned}\right\}\ y(0) = 1,\quad z(0) = 0,\quad a = 0,\quad b = 1,$

$\alpha = 2 + 0,25\cdot n,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \beta = 0,25\cdot k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5.$

Таблица 4.3

Значения параметров α, β, γ

Номер варианта	α	β	γ	Номер варианта	α	β	γ
1	0,2	0,8	0,5	11	1,0	0,25	2,0
2	0,25	2,0	0,5	12	1,0	0,5	2,0
3	0,25	1,0	0,5	13	1,0	4,0	0,5
4	0,4	0,4	1,0	14	1,6	0,4	2,0
5	0,5	2,0	0,5	15	2,0	0,5	2,0
6	0,8	0,2	2,0	16	2,5	0,4	2,5
7	0,9	0,4	1,5	17	4,0	1,0	2,0
8	1,0	1,0	1,0	18	4,0	0,25	4,0
9	1,0	1,0	2,0	19	0,9	1,6	0,75
10	1,0	2,0	2,0	20	1,0	0,75	2,0

11. Степень радиоактивности пропорциональна количеству остающегося радиоактивного вещества.

Соответствующее дифференциальное уравнение записывается в виде $y' = -ky$. Приняв $k = 0{,}01$ $1/сек$, $t_0 = 0$, $y_0 = 100$ *г*, определить, сколько вещества останется в момент $t = 100$ *сек*.

Решение найти методом Эйлера с шагами $h_1 = 25$, $h_2 = 10$, $h_3 = 5$. Результаты сравнить со значением точного решения $y = 100e^{-kt}$: при $t = 100$ *сек* $y = 36{,}788$ *г*.

12. Тело с начальной массой 200 *кг* движется под действием постоянной силы в 2000 *н*, при этом масса тела уменьшается на 1 *кг* за секунду. Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\,000}{200 - t}.$$

Приняв, что в момент $t = 0$ тело находилось в покое, найти его скорость v через 50 *сек*.

Решение найти методом Эйлера с шагами $h_1 = 10$, $h_2 = 5$, $h_3 = 2$. Сравнить результаты расчета со значением точного решения $v = 2\,000 \ln \frac{200}{200 - t}$: при $t = 50$ *сек*, $v = 575{,}36$ *м/сек*.

13. Если предположить, что тело, описанное в задаче 12, испытывает сопротивление воздуха, численно равное удвоенному значению скорости v, то соответствующее дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2000 - 2v}{200 - t}.$$

Найти скорость при $t = 50$ *сек*, если при $t = 0$ тело находится в покое.

Решение найти методом Эйлера с шагами $h_1 = 10$, $h_2 = 5$. Точное решение уравнения имеет вид $v = 10t - t^2/40$, так что $v(50) = 437{,}5$ *м/сек*.

§ 5. Модификации метода Эйлера

Первый улучшенный метод (см. [18]) для решения задачи (4.1), (4.2) состоит в том, что сначала вычисляют промежуточные значения

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1/2} &= x_i + \frac{h}{2}, \\ y_{i+1/2} &= y_i + \frac{h}{2} f_i, \\ f_{i+1/2} &= f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}), \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

а затем полагают

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+1/2}. \tag{5.2}$$

По второму улучшенному методу — методу Эйлера — Коши (см. [18]) — сначала определяют «грубое приближение»

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf_i, \tag{5.3}$$

затем вычисляют $\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$ и приближенно полагают

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f_i + \tilde{f}_{i+1}}{2}. \tag{5.4}$$

Остаточные члены первого и второго улучшенных методов Эйлера на каждом шаге имеют порядок $O(h^3)$ (см. [26]).

Оценка погрешности в точке x_n может быть получена с помощью двойного просчета: расчет повторяют с шагом $h/2$ и погрешность более точного значения y_n^* (при шаге $h/2$) оценивают приближенно так:

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{1}{3}|y_n^* - y_n|,$$

где $y(x)$ — точное решение дифференциального уравнения.

Пример 5.1. Применяя первый и второй улучшенные методы, проинтегрировать уравнение

$$y' = y - \frac{2x}{y} \tag{5.5}$$

с начальным условием $y(0) = 1$, выбрав шаг $h = 0{,}2$. Сравнить результаты с результатами примера 4.1 и с точным решением.

Решение. Первый улучшенный метод. Результаты вычислений приведены в табл. 5.1.

Заполнение таблицы производится следующим образом. Записываем в первой строке $i = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Вычисляем $f_0 = f(x_0, y_0) = 1$. Тогда по формуле (5.1) получаем при $x_{1/2} = 0{,}1$

$$y_{1/2} = 1 + 0{,}1 = 1{,}1.$$

Далее находим $f(x_{1/2}, y_{1/2}) = 0{,}9182$ и $\Delta y_0 = hf(x_{1/2}, y_{1/2}) = 0{,}2 \cdot 0{,}9182 = 0{,}1836$. Тогда по формуле (5.2) имеем

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1836 = 1{,}1836.$$

Таблица 5.1

Решение уравнения (5.5) первым улучшенным методом Эйлера

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2} f_i$	$x_{i+1/2}$	$y_{i+1/2}$	$\Delta y_i = hf_{i+1/2}$
0	0	1	0,1	0,1	1,1	0,1836
1	0,2	1,1836	0,0846	0,3	1,2682	0,1590
2	0,4	1,3426	0,0747	0,5	1,4173	0,1424
3	0,6	1,4850	0,0677	0,7	1,5527	0,1302
4	0,8	1,6152	0,0625	0,9	1,6777	0,1210
5	1,0	1,7362				

Используя этот результат, записываем во второй строке $i=1$, $x_1=0{,}2$, $y_1=1{,}1836$ и находим $\frac{h}{2}f(x_1, y_1)=0{,}0846$. Затем вычисляем по формуле (5.1) при $x_{3/2}=0{,}3$

$$y_{3/2}=1{,}1836+0{,}0846=1{,}2682.$$

Определяем $f(x_{3/2}, y_{3/2})=0{,}7942$ и $\Delta y_1=hf(x_{3/2}, y_{3/2})=0{,}2\cdot 0{,}7942=0{,}1590$. Тогда по формуле (5.2) имеем

$$y_2=y_1+\Delta y_1=1{,}1836+0{,}1590=1{,}3426.$$

Заполнение таблицы при $i=2$, 3, 4, 5 проводится аналогично.

Второй улучшенный метод (метод Эйлера — Коши). В табл. 5.2 приведены результаты вычислений методом Эйлера — Коши. Заполнение этой таблицы производится

Таблица 5.2

Решение уравнения (5.5) методом Эйлера — Коши

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2} f_i$	x_{i+1}	$\tilde{y}_{i+1}$	$\frac{h}{2} \tilde{f}_{i+1}$	$\Delta y_i = \frac{h}{2}(f_i+\tilde{f}_{i+1})$
0	0	1	0,1	0,2	1,2	0,0867	0,1867
1	0,2	1,1867	0,0850	0,4	1,3566	0,0767	0,1617
2	0,4	1,3484	0,0755	0,6	1,4993	0,0699	0,1454
3	0,6	1,4938	0,0690	0,8	1,6180	0,0651	0,1341
4	0,8	1,6272	0,0645	1,0	1,7569	0,0618	0,1263
5	1,0	1,7542					

так. Записывают в первой строке $i=0$, $x_0=0$, $y_0=1$. Находят $f_0=f(x_0, y_0)=1$, по формуле (5.3) вычисляют $\tilde{y}_1=1+0{,}2\cdot 1=1{,}2$ и в следующие столбцы первой строки заносят значения $\frac{h}{2}f_0=0{,}1$, $x_1=0{,}2$, $\tilde{y}_1=1{,}2$. Затем находят $\frac{h}{2}f(x_1, \tilde{y}_1)=0{,}1\left(1{,}2-\frac{0{,}4}{1{,}2}\right)=$

$=0{,}0867$ и по формуле (5.4) получают

$$\Delta y_0 = \frac{h}{2}(f_0 + \tilde{f}_1) = 0{,}1 + 0{,}0867 = 0{,}1867,$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1867 = 1{,}1867.$$

После этого приступают к заполнению второй строки таблицы: $i = 1$, $x_1 = 0{,}2$, $y_1 = 1{,}1867$. Затем находят

$$f_1 = f(x_1,\ y_1) = 1{,}1867 - \frac{0{,}4}{1{,}1867} = 0{,}8497,$$

$$\tilde{y}_2 = 1{,}1867 + 0{,}1699 = 1{,}3566$$

и записывают в следующих столбцах второй строки $\frac{h}{2}f_1 = 0{,}0850$, $x_2 = 0{,}4$, $\tilde{y}_2 = 1{,}3566$. Используя полученные значения x_2, $\tilde{y}_2$, вычисляют $\frac{h}{2}f(x_2,\ \tilde{y}_2) = 0{,}0767$ и по формуле (5.4) получают

$$\Delta y_1 = \frac{h}{2}(f_1 + \tilde{f}_2) = 0{,}0850 + 0{,}0767 = 0{,}1617,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}1867 + 0{,}1617 = 1{,}3484.$$

Заполнение таблицы при $i = 2,\ 3,\ 4,\ 5$ производится аналогично. Более высокая точность улучшенных методов Эйлера по сравнению с обычным методом Эйлера видна из табл. 5.3, в которой

Таблица 5.3

Сравнение точного решения уравнения (5.5) и приближенных решений, полученных методом Эйлера и его модификациями

x		0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Точное решение		1,1832	1,3416	1,4832	1,6124	1,7320
Приближенные решения, полученные	Методом Эйлера	1,2000	1,3733	1,5294	1,6786	1,8237
	Первым улучшенным методом Эйлера	1,1836	1,3426	1,4850	1,6152	1,7362
	Методом Эйлера—Коши	1,1867	1,3484	1,4938	1,6272	1,7542

приведены значения точного решения уравнения (5.5) и значения приближенных решений, полученные в табл. 4.1, 5.1 и 5.2.

ЗАДАЧИ

Применяя один из улучшенных методов Эйлера, найти значение решения дифференциального уравнения с данным начальным условием в указанной точке. Для каждой задачи взять данный шаг вычислений.

1. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $h = 0{,}03$; найти $y(0{,}3)$.

2. $y' = 1 + x - y^2$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}02$; найти $y(0{,}1)$.

3. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0$, $h = 0{,}1$; найти $y(1)$.

4. $y' = xy - 0{,}1y^2$, $y(0) = 0$, $h = 0{,}02$; найти $y(0{,}2)$.

5. $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = 0{,}5$, $h = 0{,}1$; найти $y(0{,}5)$.

6. $y' = x + \sqrt{y}$, $y(0,5) = 0{,}7240$, $h = 0{,}1$; найти $y(1{,}5)$.

7. $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$, $h = 0{,}02$; найти $y(0{,}1)$.

8. $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$, $h = 0{,}04$; найти $y(0{,}4)$.

9. $y' = x \ln y - y \ln x$, $y(1) = 1$, $h = 0{,}1$; найти $y(1{,}6)$.

10. $y' = 0{,}1\left[\sqrt[3]{y} + \ln(x+y) - 1\right]$, $y(-1) = 2$, $h = 0{,}2$; найти $y(1)$.

11. Решить задачу 11 § 4 первым и вторым улучшенными методами Эйлера с шагами $h_1 = 20$, $h_2 = 10$.

§ 6. Метод Эйлера с последующей итерационной обработкой

Метод Эйлера — Коши решения задачи (4.1), (4.2) можно еще более уточнить, применяя итерационную обработку (см. [45]) каждого значения y_i. А именно, исходя из грубого приближения

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i), \tag{6.1}$$

построим итерационный процесс

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})\right]. \tag{6.2}$$

Итерации продолжаем до тех пор, пока в двух последовательных приближениях $y_{i+1}^{(k)}$, $y_{i+1}^{(k+1)}$ не совпадут соответствующие десятичные знаки. После этого полагаем

$$y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}.$$

Как правило, при достаточно малом h итерации быстро сходятся. Если после трех-четырех итераций не произошло совпадения нужного числа десятичных знаков, то следует уменьшить шаг расчета h.

Пример 6.1. Применяя метод итерационной обработки, найти с точностью до 10^{-4} значение $y(0{,}1)$ решения уравнения

$$y' = x + y$$

с начальным условием $y(0) = 1$.

Решение. Примем шаг $h=0{,}05$. По формуле (6.1) вычисляем

$$y_1^{(0)}=y_0+hf(x_0,\ y_0)=1+0{,}05\cdot 1=1{,}05.$$

Далее по формуле (6.2) последовательно будем иметь

$$y_1^{(1)}=1+\frac{0{,}05}{2}(1+1{,}10)=1{,}0525,$$

$$y_1^{(2)}=1+\frac{0{,}05}{2}(1+1{,}0525)=1{,}05256.$$

Требуемая точность достигнута. Округляя полученный результат до четырех знаков, получим

$$y_1=1{,}0526.$$

Применяя теперь формулу (6.1) при $i=1$, вычисляем

$$y_2^{(0)}=y_1+hf(x_1,\ y_1)=1{,}0526+0{,}05\cdot 1{,}1026=1{,}1077.$$

С помощью того же итерационного процесса (6.2) получим

$$y_2^{(1)}=1{,}0526+0{,}025\,(1{,}1026+1{,}2077)=1{,}11036,$$
$$y_2^{(2)}=1{,}0526+0{,}025\,(1{,}1026+1{,}2104)=1{,}11042.$$

Таким образом,

$$y_2=1{,}1104.$$

Для сравнения вычислим точное значение $y(0{,}1)$ по формуле решения $y=2e^x-x-1$:

$$y(0,\ 1)=2e^{0,1}-1{,}1=1{,}1103.$$

ЗАДАЧИ

Применяя метод Эйлера с последующей итерационной обработкой, найти с точностью до 10^{-4} решения данных уравнений при указанных начальных условиях на отрезке $[0,\ 1]$ с шагом $h=0{,}1$.

1. $y'=1-\sin(\alpha x+y)+\dfrac{\beta y}{2+x}$, $y(0)=0$, $\alpha=1+0{,}25\cdot n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, $\beta=-0{,}3+0{,}2\cdot k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

2. $y'=\dfrac{\cos y}{\alpha+x}+\beta y^2$, $y(0)=0$, $\alpha=1+0{,}25\cdot k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, $\beta=-0{,}5+0{,}2\cdot n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

3. $y'=-y^2+\dfrac{\beta x}{1+x^2}$, $y(0)=-0{,}4122$, $\beta=2{,}5+\dfrac{\alpha}{40}$, $\alpha=14,\ 15,\ \ldots,\ 37$.

§ 7. Метод Рунге — Кутта

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y'=f(x,\ y) \tag{7.1}$$

с начальным условием

$$y(x_0)=y_0. \tag{7.2}$$

Обозначим через y_i приближенное значение искомого решения в точке x_i. По методу Рунге—Кутта (см. [2], [13], [18]) вычисление приближенного значения y_{i+1} в следующей точке $x_{i+1}=x_i+h$ производится по формулам

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i &= \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right), \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} K_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\ K_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right), \\ K_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right), \\ K_4^{(i)} &= hf(x_i + h,\ y_i + K_3^{(i)}). \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

Все вычисления удобно располагать по схеме, указанной в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Схема метода Рунге — Кутта

i	x	y	$K=hf(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0+K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				Δy_0
1	x_1	y_1		

Порядок заполнения таблицы.

1) Записываем в первой строке таблицы данные значения x_0, y_0.

2) Вычисляем $f(x_0, y_0)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_1^{(0)}$.

3) Записываем во второй строке таблицы $x_0+h/2$, $y_0+K_1^{(0)}/2$.

4) Вычисляем $f(x_0+h/2,\ y_0+K_1^{(0)}/2)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_2^{(0)}$.

5) Записываем в третьей строке таблицы $x_0+h/2$, $y_0+K_2^{(0)}/2$.

6) Вычисляем $f(x_0+h/2,\ y_0+K_2^{(0)}/2)$, умножаем на h, заносим в таблицу в качестве $K_3^{(0)}$.

7) Записываем в четвертой строке таблицы x_0+h, $y_0+K_3^{(0)}$.

8) Вычисляем $f(x_0+h, \ y_0+K_3^{(0)})$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $K_4^{(0)}$.

9) В столбец Δy записываем числа $K_1^{(0)}$, $2K_2^{(0)}$, $2K_3^{(0)}$, $K_4^{(0)}$.

10) Суммируем числа, стоящие в столбце Δy, делим на 6 и заносим в таблицу в качестве Δy_0.

11) Вычисляем $y_1=y_0+\Delta y_0$.

Затем все вычисления продолжают в том же порядке, принимая за начальную точку (x_1, y_1).

Вычисление правой части $f(x, y)$ можно включить в табл. 7.1 (см. примеры 7.1, 7.2). Если же эти вычисления слишком громоздки, рекомендуется записывать их в отдельную таблицу (см. пример 7.3).

Заметим, что шаг расчета можно менять при переходе от одной точки к другой. Для контроля правильности выбора шага h рекомендуется (см. [18]) вычислять дробь

$$\theta=\left|\frac{K_2^{(i)}-K_3^{(i)}}{K_1^{(i)}-K_2^{(i)}}\right|. \tag{7.5}$$

Величина θ не должна превышать нескольких сотых. В противном случае шаг h следует уменьшить. Метод Рунге—Кутта имеет порядок точности h^4 на всем отрезке $[x_0, X]$. Оценка погрешности метода очень затруднительна. Грубую оценку погрешности можно получить с помощью двойного просчета по формуле

$$|y_n^*-y(x_n)|\approx\frac{|y_n^*-y_n|}{15},$$

где $y(x_n)$—значение точного решения уравнения (7.1) в точке x_n, а y_n^*, y_n—приближенные значения, полученные с шагом $h/2$ и h.

При реализации метода Рунге—Кутта на ЭВМ с автоматическим выбором шага обычно в каждой точке x_i делают двойной просчет—сначала с шагом h, затем с шагом $h/2$. Если полученные при этом значения y_i различаются в пределах допустимой точности, то шаг h для следующей точки (x_{i+1}) удваивают, в противном случае берут половинный шаг.

Пример 7.1. Методом Рунге—Кутта найти решение уравнения

$$y'=0{,}25y^2+x^2 \tag{7.6}$$

с начальным условием $y(0)=-1$ на отрезке $[0; 0{,}5]$, приняв шаг $h=0{,}1$.

Решение. Результаты вычислений помещены в табл. 7.2. Ее заполнение ведется в следующем порядке. При $i=0$:

1) Записываем в первой строке $x_0=0$, $y_0=-1$.

2) Вычисляем $f(x_0, y_0)=0{,}25$, тогда $K_1^{(0)}=0{,}1\cdot 0{,}25=0{,}025$.

3) Записываем во второй строке $x_0=h/2=0{,}05$, $y_0+K_1^{(0)}/2=$ $=-0{,}98750$.

4) Вычисляем $f(x_0+h/2, \ y_0+K_1^{(0)}/2)=0{,}24629$; тогда $K_2^{(0)}=$ $=0{,}024629$.

5) Записываем в третьей строке $x_0+h/2=0{,}05$, $y_0+K_2^{(0)}/2=$ $=-0{,}98769$.

6) Вычисляем $f(x_0+h/2,\ y_0+K_2^{(0)}/2)=0{,}25\cdot(0{,}98769)^2+(0{,}05)^2=$ $=0{,}24638$; тогда $K_3^{(0)}=0{,}024638$.

7) Записываем в четвертой строке $x_0+h=0{,}1$, $y_0+K_3^{(0)}=$ $=-0{,}97536$.

8) Вычисляем $f(x_0+h,\quad y_0+K_3^{(0)})=0{,}25\cdot(0{,}97536)^2+(0{,}1)^2=$ $=0{,}24783$; тогда $K_4^{(0)}=0{,}024783$.

9) В столбце Δy записываем числа $K_1^{(0)}$, $2K_2^{(0)}$, $2K_3^{(0)}$, $K_4^{(0)}$.

10) Вычисляем $\Delta y_0=\frac{1}{6}\cdot 0{,}148317=0{,}02472$.

11) Получаем $y_1=y_0+\Delta y_0=-0{,}97528$.

Значения $x_1=0{,}1$, $y_1=-0{,}97528$ заносим в строку, помеченную индексом $i=1$, и снова проводим вычисления по формулам (7.3), (7.4).

В последнем столбце таблицы приведены значения величины θ, полученные по формуле (7.5).

Пример 7.2. Методом Рунге—Кутта найти с точностью до $5\cdot10^{-6}$ решение дифференциального уравнения

$$y'=\frac{\operatorname{sh}(0{,}5y+x)}{1{,}5}+0{,}5y \qquad (7.7)$$

с начальным условием $y(0)=0$ на отрезке $[0;0{,}2]$.

Решение. Для выбора шага вычислим решение в точке $x=0{,}1$ с шагом $h=0{,}1$ и с шагом $h=0{,}05$.

При вычислении с шагом $h=0{,}1$ последовательно имеем

$$K_1^{(0)}=0,$$

$$K_2^{(0)}=0{,}1\cdot\frac{\operatorname{sh}0{,}05}{1{,}5}=0{,}003335,$$

$$K_3^{(0)}=0{,}1\left(\frac{\operatorname{sh}(0{,}5\cdot0{,}001667+0{,}05)}{1{,}5}+0{,}5\cdot0{,}001667\right)=0{,}003475,$$

$$K_4^{(0)}=0{,}1\left(\frac{\operatorname{sh}(0{,}5\cdot0{,}003475+0{,}1)}{1{,}5}+0{,}5\cdot0{,}003475\right)=0{,}006969.$$

Отсюда $\Delta y_0=0{,}003432$ и, следовательно,

$$y_1=y_0+\Delta y_0=0{,}003432.$$

Далее находим значение $y(0{,}1)$ как результат вычислений с шагом $h=0{,}05$ (см. табл. 7.3).

Поскольку полученные результаты совпадают в пределах заданной точности, вычисления продолжим с шагом $h=0{,}1$ и шагом $h=0{,}2$. Результаты дальнейших вычислений помещены в табл. 7.4 и 7.5.

Сравнение результатов расчета, полученных с шагом $h=0{,}1$ и с шагом $h=0{,}2$, показывает, что с точностью до $5\cdot10^{-6}$ можно принять $y(0{,}2)\approx0{,}014158$ и что в дальнейшем шаг расчета следовало бы снова удвоить.

Таблица 7.2

Решение уравнения (7.6) методом Рунге — Кутта

i	x	y	$0{,}25y$	$K=hf\ (x,\ y)$	Δy	$\theta=\left\lvert \dfrac{K_2-K_3}{K_1-K_2} \right\rvert$
0	0	—1	—0,25	0,025	0,025	0,024
	0,05	—0,98750	—0,24688	0,024629	0,049258	
	0,05	—0,98769	—0,24692	0,024638	0,049276	
	0,1	—0,97536	—0,24384	0,024783	0,024783	
					0,02472	
1	0,1	—0,97528	—0,24382	0,024779	0,024779	0,025
	0,15	—0,96289	—0,24072	0,025429	0,050858	
	0,15	—0,96257	—0,24064	0,025413	0,050826	
	0,2	—0,94987	—0,23747	0,026557	0,026557	
					0,02550	
2	0,2	—0,94978	—0,23745	0,026553	0,026553	0,023
	0,25	—0,93650	—0,23413	0,028176	0,056352	
	0,25	—0,93569	—0,23392	0,028138	0,056276	
	0,3	—0,92164	—0,23041	0,030236	0,030236	
					0,02824	
3	0,3	—0,92154	—0,23039	0,030231	0,030231	0,023
	0,35	—0,90642	—0,22661	0,032790	0,065580	
	0,35	—0,90514	—0,22629	0,032732	0,065464	
	0,4	—0,88881	—0,22220	0,035743	0,035749	
					0,03284	
4	0,4	—0,88870	—0,22218	0,035745	0,035745	0,022
	0,45	—0,87083	—0,21771	0,039209	0,078418	
	0,45	—0,86910	—0,21728	0,039134	0,078268	
	0,5	—0,84957	—0,21239	0,04307	0,043044	
					0,03925	
5	0,5	—0,84945				

Таблица 7.3

Решение уравнения (7.7) методом Рунге — Кутта (шаг $h = 0,05$)

x	y	$0,5y$	$0,5y+x$	sh $(0,5y+x)$	$f(x, y)$	$K=hf(x, y)$	Δy
0	0	0	0	0	0	0	
0,025	0	0	0,025	0,02500	0,01667	0,000834	0,000846
0,025	0,000417	0,000208	0,025208	0,02521	0,01702	0,000851	
0,05	0,000851	0,000426	0,050426	0,05045	0,03406	0,001703	
0,05	0,000846	0,000423	0,050423	0,05044	0,03405	0,001702	
0,075	0,001697	0,000848	0,075848	0,07592	0,05146	0,002573	0,002586
0,075	0,002132	0,001066	0,076066	0,07614	0,05183	0,002592	
0,1	0,003438	0,001719	0,101719	0,10190	0,06965	0,003482	
0,1	0,003432						

Таблица 7.4

Решение уравнения (7.7) методом Рунге — Кутта (шаг $h = 0,1$)

x	y	$0,5y$	$0,5y+x$	sh $(0,5y+x)$	$f(x, y)$	$K=hf(x, y)$	Δy
0,1	0,003432	0,001717	0,101717	0,10190	0,06965	0,006965	
0,15	0,006914	0,003457	0,153457	0,15406	0,10617	0,010617	0,010726
0,15	0,008740	0,004370	0,154370	0,15499	0,10770	0,010770	
0,2	0,014202	0,007101	0,207101	0,20858	0,14615	0,014615	
0,2	0,014158						

Таблица 7.5

Решение уравнения (7.7) методом Рунге — Кутта (шаг $h = 0,2$)

x	y	$0,5y$	$0,5y+x$	sh $(0,5y+x)$	$f(x, y)$	$K=hf(x, y)$	Δy
0,0	0	0	0	0	0	0	
0,1	0	0	0,1	0,10017	0,06678	0,013356	0,014155
0,1	0,006678	0,003339	0,103339	0,10352	0,07235	0,014470	
0,2	0,014470	0,007235	0,207235	0,20872	0,14638	0,029276	
0,2	0,014155						

Замечание. Аналогично метод Рунге—Кутта применяется для решения систем дифференциальных уравнений и уравнений высших порядков, которые предварительно следует свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Таблица 7.6

Решение системы (7.8) методом Рунге — Кутта

i	t	X	$K=hf$	qK	$\Delta X=\frac{1}{6}\sum_i qK$
0	0	2 1 1	0,1 0 0	0,1 0 0	0,08984 0,00497 —0,00500
	0,05	2,05 1 1	0,09 0,00525 —0,005	0,18 0,01050 —0,010	
	0,05	2,045 1,00262 0,99750	0,08975 0,00471 —0,00500	0,17950 0,00942 —0,01000	
	0,1	2,08975 1,00471 0,99500	0,07955 0,00992 —0,00998	0,07955 0,00992 —0,00998	
1	0,1	2,08984 1,00497 0,99500	0,07953 0,00988 —0,00998	0,07953 0,00988 —0,00998	0,06896 0,01456 —0,01494
	0,15	2,12960 1,00991 0,99001	0,06908 0,01480 —0,01496	0,13816 0,02960 —0,02992	
	0,15	2,12438 1,01237 0,98752	0,06888 0,01433 —0,01493	0,13777 0,02866 —0,02986	
	0,2	2,15872 1,01930 0,98007	0,05829 0,01911 —0,01986	0,05829 0,01911 —0,01986	
2	0,2	2,15880 1,01953 0,98006	0,05827 0,01907 —0,01987	0,05827 0,01907 —0,01987	0,04739 0,02313 —0,02473
	0,25	2,18794 1,02907 0,97012	0,04747 0,02346 —0,02477	0,09494 0,04692 —0,04954	
	0,25	2,18254 1,03126 0,96758	0,04733 0,02292 —0,02472	0,09466 0,04584 —0,04944	
	0,3	2,20613 1,04245 0,95534	0,03644 0,02694 0,02954	0,03644 0,02694 0,02954	

Пример 7.3. Для системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x+5z, \\ \frac{dy}{dt} &= -(1-\sin t)\,x-y+3z, \\ \frac{dz}{dt} &= -x+2z \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

с начальными условиями $x(0)=2$, $y(0)=1$, $z(0)=1$ методом Рунге—Кутта составить таблицу значений функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ на отрезке $[0;\ 0{,}3]$ с шагом $h=0{,}1$.

Решение. Все вычисления для функций x, y, z помещаем в одну табл. 7.6. Заполнение ее производится следующим образом. Обозначим $f_1=-2x+5z$, $f_2=-(1-\sin t)\,x-y+3z$, $f_3=-x+2z$.

1) При $i=0$ записываем $t=0$, а в столбец X заносим $x_0=2$, $y_0=1$, $z_0=1$.

2) Вычисляем

$$f_1(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0)=-4+5=1,$$
$$f_2(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0)=-2-1+3=0,$$
$$f_3(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0)=-2+2=0.$$

Умножив полученные величины на h, получаем значения K_1 для x, y, z соответственно. Записываем их в столбец K.

3) Заполняем следующие три строки таблицы для $t=0{,}05$. В столбце X записываем $x_0+\frac{K_{1x}^{(0)}}{2}=2{,}05$, $y_0+\frac{K_{1y}^{(0)}}{2}=1$, $z_0+\frac{K_{1z}^{(0)}}{2}=1$.

4) Вычисляем f_1, f_2, f_3 для написанных значений t, x, y, z и в столбец K заносим значения

$$K_{2x}^{(0)}=0{,}09, \qquad K_{2y}^{(0)}=0{,}00525, \qquad K_{2z}^{(0)}=-0{,}005.$$

5) Заполняем следующие три строки таблицы для $t=0{,}05$. В столбце X записываем

$$x_0+\frac{K_{2x}^{(0)}}{2}=2{,}045, \qquad y_0+\frac{K_{2y}^{(0)}}{2}=1{,}00262, \qquad z_0+\frac{K_{2z}^{(0)}}{2}=0{,}99750$$

и ведем вычисления аналогично предыдущим.

В столбце qK записываем значения $K_1^{(0)}$, $2K_2^{(0)}$, $2K_3^{(0)}$, $K_4^{(0)}$ для x, y, z соответственно.

Затем, используя эти числа, находим

$$\Delta x_0=\frac{1}{6}\left(K_{1x}^{(0)}+2K_{2x}^{(0)}+2K_{3x}^{(0)}+K_{4x}^{(0)}\right)=0{,}08984$$

и, аналогично, $\Delta y_0=0{,}00497$, $\Delta z_0=-0{,}00500$. Тогда

$$x_1=x_0+\Delta x_0=2{,}08984, \qquad y_1=y_0+\Delta y_0=1{,}00497,$$
$$z_1=z_0+\Delta z_0=0{,}99500.$$

Записываем полученные значения x_1, y_1, z_1 в табл. 7.6 при $i=1$ и продолжаем вычисления по рассмотренной схеме.

ЗАДАЧИ

1. Методом Рунге — Кутта с шагом $h=0,2$ найти решения данных уравнений и систем на указанном отрезке $[a, b]$.

а) $y'=y-x,\ y(0)=1,5, \quad a=0,\ b=1,$

б) $y'=\frac{y}{x}-y^2, \quad y(1)=1,\ a=1,\ b=2,$

в) $\left.\begin{aligned} y'&=z+1,\\ z'&=y-x,\end{aligned}\right\} \quad y(0)=1,\ z(0)=1,\ a=0,\ b=1.$

Методом Рунге — Кутта с шагом $h=0,1$ найти на отрезке $[0; 0,3]$ решение следующих дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

2. $x'=\frac{\cos bt}{a+x^2}, \quad x(0)=0, \quad a=1,0+0,4\cdot n, \quad n=0, 1, 2, 3, 4, 5,$ $b=1,0+0,8\cdot k, \quad k=0,\ 1,\ 2.$

3. $x'=\frac{a}{t^2+x^2+b}, \quad x(0)=0, \quad a=1,0+0,4\cdot n, \quad n=0, 1, \ldots, 5,$ $b=1,0+0,4\cdot k, \quad k=0, 1, \ldots, 5.$

4. $x'=e^{-at}(x^2+b),\ x(0)=0, \quad a=1,0+0,4\cdot n, \quad n=0, 1, \ldots, 5,$ $b=1,0+0,4\cdot k, \quad k=0, 1, \ldots, 5.$

5. $x'=\cos(at+x)+t-x,\ x(0)=0,\ a=1,0+0,4\cdot k,\ k=0, 1, \ldots, 5.$

6. $x'=1-\sin(at+x)+\frac{bx}{2+t}, \quad x(0)=0, \quad a=1,0+0,4\cdot k,$ $k=0, 1, \ldots, 5, \quad b=1,0+0,8\cdot n, \quad n=0, 1, 2.$

7. $x'=\frac{\cos x}{a+t}+x^2,\ x(0)=0,\ a=1,0+0,4\cdot k, \quad k=0, 1, \ldots, 5.$

8. $x'=1+ax\sin t-x^2,\ x(0)=0,\ a=1,0+0,4\cdot k,\ k=0, 1, \ldots, 5.$

9. $\left.\begin{aligned} x'&=\cos(x+ay)+b,\\ y'&=\frac{a}{t+bx^2}+t+1,\end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x(0)=1,\ y(0)=0,05,\ a=2,0+0,5\cdot n,\\ &n=0, 1, 2, 3,\ b=2,0+0,5\cdot k,\\ &k=0, 1, \ldots, 5.\end{aligned}$

10. $\left.\begin{aligned} x'&=\sin(ax^2)+t+y,\\ y'&=t+x-by^2+1,\end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x(0)=1,\ y(0)=0,5,\ a=2,0+0,5\cdot n,\\ &n=0, 1, 2, 3,\ b=2,0+0,5\cdot k,\\ &k=0, 1, \ldots, 5.\end{aligned}$

11. $\left.\begin{aligned} x'&=\sqrt{t^2+ax^2}+y,\\ y'&=\cos(by)+x,\end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x(0)=0,5,\ y(0)=1,\ a=2,0+0,5\cdot n,\\ &n=0, 1, 2, 3,\ b=2,0+0,5\cdot k,\\ &k=0, 1, \ldots, 5.\end{aligned}$

12. $\left.\begin{aligned} x'&=e^{-(x^2+y^2)}+at,\\ y'&=bx^2+y,\end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x(0)=0,5,\ y(0)=1,\ a=2,0+0,5\cdot n,\\ &n=0, 1, 2, 3,\ b=2,0+0,5\cdot k,\\ &k=0, 1, \ldots, 5.\end{aligned}$

13. $\left.\begin{aligned} x'&=\ln\left(bt+\sqrt{a^2t^2+y^2}\right),\\ y'&=\sqrt{a^2t^2+x^2},\end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x(0)=1,\ y(0)=0,5,\ a=2,0+\\ &+0,5\cdot n,\ n=0, 1, 2, 3,\\ &b=2,0+0,5\cdot k,\ k=0, 1, \ldots, 5.\end{aligned}$

14. Решить задачу 11 § 4 методом Рунге—Кутта с шагами $h_1 = 100$, $h_2 = 50$.

15. Решить задачу 12 § 4 методом Рунге—Кутта с шагом $h = 10$.

16. Решить задачу 13 § 4 методом Рунге—Кутта с шагом $h = 10$.

§ 8. Метод Адамса

Пусть для уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{8.1}$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$ найдены каким-либо способом (Эйлера, последовательных приближений, Рунге—Кутта и др.) три последовательных значения искомой функции («начальный отрезок»)

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h), \quad y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h),$$
$$y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h).$$

С помощью этих значений вычисляем величины

$$q_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0), \qquad q_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1),$$
$$q_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2), \qquad q_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3).$$

Записываем числа x_k, y_k, y'_k, q_k ($k = 0, 1, 2, 3$) в табл. 8.1 и вычисляем конечные разности величины q (числа над ломаной линией в табл. 8.1).

Метод Адамса (см. [2], [13], [20]) состоит в продолжении этой таблицы разностей с помощью формулы

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3} \qquad (k = 3, 4, \ldots), \tag{8.2}$$

которая называется *экстраполяционной формулой Адамса*. Она применяется для «предсказания» значения $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$. Подсчитанное

Таблица 8.1

Схема метода Адамса

k	x_k	y_k	$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$	$y'_k = f(x_k, y_k)$	$q_k = hy'_k$	$\Delta q_k = q_{k+1} - q_k$	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
0	x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
2	x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
4	x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4, y_4)$	q_4	Δq_4		
5	x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5, y_5)$	q_5			
6	x_6	y_6						

по этой формуле «предсказанное» значение мы будем обозначать через $y_{k+1}^{\text{пред}}$. Полученное по формуле (8.2) значение Δy_k надо еще уточнить. Для этого нужно записать в таблицу значения x_{k+1}, y_{k+1}, y'_{k+1}, q_{k+1}, дополнить таблицу разностей, а затем сделать пересчет по формуле «коррекции»

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_k - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{k-2}, \qquad (8.3)$$

которая называется *интерполяционной формулой Адамса*. Уточненное с помощью формулы (8.3) значение мы будем обозначать через $y_{k+1}^{\text{кор}}$.

Формулы (8.2) и (8.3) имеют достаточно большую точность. Они дают погрешность порядка $O(h^4)$, но сами формулы оценки погрешности довольно сложны.

На практике обычно пользуются следующими соображениями. Ошибка более точной формулы коррекции (8.3) составляет примерно 1/14 часть разности между значениями Δy_k, подсчитанными по формулам (8.2) и (8.3). Поэтому, если указанная разность ненамного превышает допустимую ошибку расчета, то шаг h считается выбранным верно и расчет продолжают с выбранным шагом. Если же на некотором этапе расчета указанная разность становится большой (и при этом нет ошибки в самих вычислениях!), то шаг расчета h следует уменьшить. Рекомендуется уменьшать шаг в два раза, используя уже имеющиеся точки и формулы интерполяции на середину.

Порядок заполнения таблицы 8.1.

1) Записываем в табл. 8.1 числа x_k, y_k, y'_k, q_k $(k=0, 1, 2, 3)$ и вычисляем разности Δq_k $(k=0, 1, 2)$, $\Delta^2 q_k$ $(k=0, 1)$, $\Delta^3 q_0$.

2) Используя числа q_3, Δq_2, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$, помещенные в таблице разностей по диагонали, определяем по формуле (8.2) при $k=3$

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0.$$

3) Вычисляем $x_4 = x_3 + h$, $y_4 = y_3 + \Delta y_3$.

4) Записываем значения x_4, y_4 в табл. 8.1, находим $y'_4 = f(x_4, y_4)$, $q_4 = hy'_4$ и пополняем таблицу разностей значениями Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$.

5) Используя полученные значения разностей q, уточняем величину Δy_3 по формуле (8.3) при $k=3$:

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_3 - \frac{1}{12}\Delta^2 q_2 - \frac{1}{24}\Delta^3 q_1.$$

6) Если скорректированное значение Δy_3 отличается от предсказанного значения Δy_3 на несколько единиц младшего сохраняемого разряда, то вносим соответствующие поправки в значения Δy_3 и y_4, проверяем, что эти поправки не скажутся существенно на значении q_4, и продолжаем расчет с выбранным шагом. В противном случае выбираем меньший шаг.

Вычисления для $k=4, 5, \ldots$ проводятся аналогично.

Для работы на ЭВМ формулы Адамса удобнее применять в другой форме, выражая y_{k+1} не через разности Δq, а непосредственно через величины q. Так получают экстраполяционную формулу Адамса в виде

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{24}(55y'_k-59y'_{k-1}+37y'_{k-2}-9y'_{k-3}) \qquad (8.4)$$

и интерполяционную формулу Адамса в виде

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{24}(9y'_{k+1}+19y'_k-5y'_{k-1}+y'_{k-2}). \qquad (8.5)$$

Метод Адамса легко распространяется на системы дифференциальных уравнений, а также на дифференциальные уравнения n-го порядка.

Пусть имеем систему двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z), \\ z' &= f_2(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad (8.6)$$

Экстраполяционные формулы Адамса для этой системы записываются так:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_k &= p_k+\frac{1}{2}\Delta p_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 p_{k-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 p_{k-3}, \\ \Delta z_k &= q_k+\frac{1}{2}\Delta q_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.7)$$

где

$$p_k=hy'_k=hf_1(x_k, y_k, z_k), \qquad q_k=hz'_k=hf_2(x_k, y_k, z_k).$$

Аналогичным образом записываются интерполяционные формулы Адамса для системы.

Пример 8.1. Методом Адамса найти на отрезке [0; 0,5] решение дифференциального уравнения

$$y'=\frac{\operatorname{sh}(0{,}5\,y+x)}{1{,}5}+0{,}5y \qquad (8.8)$$

с начальным условием $y(0)=0$; шаг взять $h=0{,}05$.

Решение. В примере 7.2 с помощью метода Рунге—Кутта были вычислены значения искомой функции при $x_1=0{,}05$, $x_2=0{,}10$. Аналогично можно вычислить значение искомой функции и при $x_3=0{,}15$. Воспользуемся этими результатами и продолжим вычисления по формуле (8.2). Результаты вычислений расположены в двух таблицах: табл. 8.2 — основная таблица разностей, табл. 8.3 — вспомогательная таблица вычисления правой части уравнения (8.8).

Порядок заполнения таблиц.

1) Записываем в табл. 8.2 значения $x_0=0$, $x_1=0{,}05$, $x_2=0{,}10$, $x_3=0{,}15$ и соответствующие им значения y_k ($k=0, 1, 2, 3$), находим $f(x_k, y_k)$, q_k и составляем таблицу разностей.

2) По формуле (8.2) при $k=3$ находим

$$\Delta y_3=0{,}005347+\frac{1}{2}0{,}001865+\frac{5}{12}0{,}000085+\frac{3}{8}0{,}000007=0{,}006318.$$

3) Вычисляем $y_4=0{,}007838+0{,}006318=0{,}014156$.

4) Записываем значения x_4, y_4 в табл. 8.3, находим

$$y'_4=f(x_4, y_4)=\frac{2}{3}\operatorname{sh}(0{,}5\cdot 0{,}014156+0{,}2)+0{,}5\cdot 0{,}014156=0{,}14612;$$

Таблица 8.2

Решение уравнения (8.8) методом Адамса

k	x_k	y_k	Δy_k	$q_k=hf(x_k, y_k)$	Δq_k	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
0	0	0		0	1702	78	7
1	0,05	0,000846		0,001702	1780	85	9
2	0,10	0,003432		0,003482	1865	94	11
3	0,15	0,007838	06318	0,005347	1959	105	11
4	0,20	0,014156	08329	0,007306	2064	116	13
5	0,25	0,022485	10451	0,009370	2180	129	13
6	0,30	0,032936	12692	0,011550	2309	142	17
7	0,35	0,045628	15070	0,013859	2451	159	
8	0,40	0,060698	17603	0,016310	2610		
9	0,45	0,078301	20295	0,018920			
10	0,50	0,098596					

Таблица 8.3

Вычисление правой части уравнения (8.8)

k	x_k	y_k	$0,5y_k$	$0,5y_k+x_k$	$\mathrm{sh}\,(0,5y_k+x_k)$	$f(x_k, y_k)$
4	0,20	0,014156	0,007078	0,207078	0,20856	0,14612
5	0,25	0,022485	0,011242	0,261242	0,26422	0,18739
6	0,30	0,032936	0,016468	0,316468	0,32178	0,23099
7	0,35	0,045628	0,022814	0,378814	0,38151	0,27715
8	0,40	0,060698	0,030349	0,430349	0,44376	0,32619
9	0,45	0,078301	0,039150	0,489150	0,50889	0,37841

тогда

$$q_4 = hy'_4 = 0{,}007306.$$

Записываем полученный результат в табл. 8.2 и вычисляем разности Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$.

5) По формуле (8.3) вычисляем скорректированное значение

$$\Delta y_3 = 0{,}005347 + \frac{1}{2}\,0{,}001959 - \frac{1}{12}\,0{,}000094 - \frac{1}{24}\,0{,}000009 = 0{,}006318.$$

Так как скорректированное значение Δy_3 совпадает с предсказанным значением Δy_3, то продолжаем расчет с выбранным шагом уже без дальнейшей коррекции.

6) По формуле (8.2) при $k=4$ находим

$$\Delta y_4 = 0{,}007306 + \frac{1}{2}\,0{,}001959 + \frac{5}{12}\,0{,}000094 + \frac{3}{8}\,0{,}000009 = 0{,}008329,$$

и т. д.

Замечание. Так же как и при решении примера 7.2, здесь можно было вести расчет с бóльшим шагом. Об этом, в частности, свидетельствует и малая величина разностей $\Delta^3 q$.

Пример 8.2. Методом Адамса найти на отрезке [0; 0,5] с точностью до 10^{-5} решение уравнения

$$y' = 0{,}25y^2 + x^2 \tag{8.9}$$

с начальным условием $y(0) = -1$.

Решение. В примере 7.1 методом Рунге—Кутта с шагом $h = 0{,}1$ были получены значения искомой функции при $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$. Дальнейшие вычисления будем вести на вычислительной машине по формуле (8.4) с уточнением по формуле (8.5). Результаты вычислений помещены в двух таблицах: табл. 8.4 — вычисления по формуле (8.4) с уточнением по формуле (8.5), табл. 8.5 — вычисление правой части. Через α_k и β_k в табл. 8.4 обозначены суммы

$$\alpha_k = 55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}, \quad \beta_k = 9y'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}.$$

Таблица 8.4

Решение уравнения (8.9) методом Адамса

k	x_k	y_k	y'_k	$\frac{\alpha_k}{24}$	$\frac{\beta_k}{24}$	$h\frac{\alpha_k}{24}$	$h\frac{\beta_k}{24}$
0	0,0	—1	0,25				
1	0,1	—0,97528	0,24779				
2	0,2	—0,94978	0,26552				
3	0,3	—0,92154	0,30232	0,32834	0,32840	0,03283	0,03284
4	0,4	—0,88871	0,35745	0,39237	0,39246	0,03924	0,03925
		—0,88870					
5	0,5	—0,84946	0,43040				
		—0,84946					

Таблица 8.5

Вычисление правой части уравнения (8.9)

k	x	x^2	y	$0{,}25y^2$	$f(x, y) = 0{,}25y^2 + x^2$
0	0	0	—1	0,25	0,25
1	0,1	0,01	—0,97528	0,23779	0,24779
2	0,2	0,04	—0,94978	0,22552	0,26552
3	0,3	0,09	—0,92154	0,21232	0,30232
4	0,4	0,16	—0,88871	0,19745	0,35745
			—0,88870		
5	0,5	0,25	—0,84946	0,18040	0,43040
			—0,84946		

Порядок заполнения таблиц.

1) Записываем в табл. 8.5 значения $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$ и соответствующие значения y_k ($k = 0, 1, 2, 3$). Вычисляем по ним $y'_k = f(x_k, y_k)$.

2) Вычисляем величину $\frac{\alpha_3}{24}=\frac{1}{24}(55y'_3-59y'_2+37y'_1-9y'_0)=$ $=0,32834$, записываем ее в табл. 8.4 и по формуле (8.4) при $k=4$ находим

$$y_4^{\text{пред}}=y_3+h\frac{\alpha_3}{24}=-0,92154+0,1\cdot 0,32834=-0,88871.$$

3) Записываем значения x_4, y_4 в табл. 8.5 и вычисляем по ним $y'_4=f(x_4, y_4)=0,35745$.

4) Вычисляем величину

$$\frac{\beta_3}{24}=\frac{1}{24}(9y'_4+19y'_3-5y'_2+y'_1)=0,32840,$$

записываем ее в табл. 8.4 при $k=3$ и уточняем значение y_4 по формуле (8.5):

$$y_4^{\text{кор}}=y_3+h\frac{\beta_3}{24}=-0,92154+0,1\cdot 0,32840=-0,88870.$$

5) Так как полученные значения $y_4^{\text{пред}}$ и $y_4^{\text{кор}}$ отличаются только на 10^{-5}, то вносим исправление в значение y_4 в табл. 8.4 и в табл. 8.5:

$$y_4=-0,88870.$$

6) Записываем полученное значение $y_4=y_4^{\text{кор}}$ в табл. 8.5, убеждаемся в том, что внесенное исправление не изменяет значения $y'_4=f(x_4, y_4)$.

Вычисление для y_5 проводим аналогичным образом.

Пример 8.3. Дана система уравнений

$$\left.\begin{aligned} y'&=\cos(y+1,1z)+1,\\ z'&=\frac{1}{x+2,1y^2}+x+1 \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

с начальными условиями $y(0)=\pi$, $z(0)=0$. Методом Адамса найти решение этой системы на отрезке $[0;\ 0,6]$, взяв шаг $h=0,1$ и считая известными значения функций $y(x)$ и $z(x)$ при $x_1=0,1$, $x_2=0,2$, $x_3=0,3$; эти значения равны $y(0,1)=3,14184$; $y(0,2)=3,14364$; $y(0,3)=3,14903$; $z(0,1)=0,10981$; $z(0,2)=0,22960$, $z(0,3)=0,35934$.

Решение. Значения функций $y(x)$, $z(x)$ при $x_4=0,4$, $x_5=0,5$, $x_6=0,6$ будем искать с помощью формул (8.7), обозначив

$$f_1(x,\ y,\ z)=\cos(y+1,1z)+1, \qquad f_2(x,\ y,\ z)=\frac{1}{x+2,1y^2}+x+1.$$

Все вычисления расположены в двух таблицах: табл. 8.6 — основная таблица метода Адамса, табл. 8.7 — вспомогательная таблица вычисления правых частей.

Порядок заполнения таблиц.

1) Записываем в табл. 8.6 и 8.7 значения $x_k=kh$ и соответствующие значения y_k и z_k $(k=0, 1, 2, 3)$.

2) Вычисляем $y'_k=f_1(x_k, y_k, z_k)$, $z'_k=f_2(x_k, y_k, z_k)$ $(k=0, 1, 2, 3)$.

Таблица 8.6

Решение системы (8.10) методом Адамса

k	x_k	y_k	Δy_k	p_k	Δp_k	$\Delta^2 p_k$	$\Delta^3 p_k$
0	0	3,14159		0	73	176	53
1	0,1	3,14184		0,00073	249	229	63
2	0,2	3,14364		0,00322	478	292	66
3	0,3	3,14903	0,01154	0,00800	770	358	
4	0,4	3,16057	0,02101	0,01570	1128		
5	0,5	3,18158	0,03446	0,02708			
6	0,6	3,21604					

k	z_k	Δz_k	q_k	Δq_k	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
0	0		0,10482	998	—1	0
1	0,10981		0,11480	997	—1	0
2	0,22960		0,12477	996	—1	2
3	0,35934	0,13971	0,13473	995	—3	
4	0,49905	0,14965	0,14468	992		
5	0,64870	0,15955	0,15460			
6	0,80825					

Таблица 8.7

Вычисление правых частей системы (8.10)

k	x	y^2	$\dfrac{1}{x+2,1y^2}$	$z'=f_2(x, y, z)$	$y+1,1z$	$y'=f_1(x, y, z)$
0	0,0	9,8696	0,04824	1,04824	3,14159	0
1	0,1	9,8712	0,04801	1,14801	3,26264	0,00732
2	0,2	9,8825	0,04773	1,24773	3,39620	0,03224
3	0,3	9,9164	0,04734	1,34734	3,54433	0,08001
4	0,4	9,9896	0,04478	1,44678	3,70954	0,15700
5	0,5	10,1233	0,04596	1,54596	3,89524	0,27080

3) Находим числа $p_k = hy'_k$, $q_k = hz'_k$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, записываем их в табл. 8.6 и составляем разности Δp, $\Delta^2 p$, $\Delta^3 p$, Δq, $\Delta^2 q$, $\Delta^3 q$.

4) Используя найденные разности, по формулам (8.7) при $k = 3$ получаем

$$\Delta y_3 = 0{,}00800 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}00478 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}00229 + \frac{3}{8}\cdot 0{,}00053 = 0{,}01154,$$

$$\Delta z_3 = 0{,}13473 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}00996 + \frac{5}{12}(-0{,}00001) = 0{,}13971.$$

5) Определяем

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 3{,}16057, \qquad z_4 = z_3 + \Delta z_3 = 0{,}49905.$$

Записываем полученные значения в табл. 8.6 и 8.7 и вычисляем по ним $y'_5 = f_1(x_5, y_5, z_5)$, $z'_5 = f_2(x_5, y_5, z_5)$.

6) Находим числа $p_5 = hy'_5$, $q_5 = hz'_5$, записываем их в табл. 8.6, пополняем таблицу разностей и по формулам (8.7) при $k=4$ продолжаем вычисления.

Уточнение полученных значений по формулам коррекции здесь не производилось, так как скорректированные значения разностей совпадают с предсказанными в пределах точности расчета. Например, при $k=4$

$$\Delta y_4^{\text{кор}} = 0{,}01570 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}01128 - \frac{1}{12}\cdot 0{,}00358 - \frac{1}{24}\cdot 0{,}00066 = 0{,}02101,$$

$$\Delta z_4^{\text{кор}} = 0{,}14468 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}00992 - \frac{1}{12}(-0{,}00003) = 0{,}14964.$$

ЗАДАЧИ

1. Методом Адамса найти с точностью до 10^{-2} значения решений следующих дифференциальных уравнений и систем уравнений при указанных значениях аргумента. «Начальный отрезок» найти методом Рунге — Кутта.

а) $y' = x + y$, $y(0) = 1$, найти $y(0{,}5)$,

б) $y' = x^2 + y$, $y(0) = 1$, найти $y(1)$,

в) $y' = 2y - 3$, $y(0) = 1$, найти $y(0{,}5)$,

г) $\left.\begin{aligned} y' &= -x + 2y + z, \\ z' &= x + 2y + 3z, \end{aligned}\right\}$ $y(0) = 2$, $z(0) = -2$, найти y и z при $x = 0{,}5$,

д) $\left.\begin{aligned} y' &= -3y - z, \\ z' &= y - z, \end{aligned}\right\}$ $y(0) = 2$, $z(0) = -1$, найти y и z при $x = 0{,}5$.

2. Методом Адамса численно решить с точностью до 10^{-4} на отрезке $[a, b]$ следующие дифференциальные уравнения. «Начальный отрезок» найти методом Рунге — Кутта.

а) $y' = xy^3 - y$, $y(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$, б) $y' = y^2 e^x - 2y$, $y(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$, в) $y' = \dfrac{1}{y^2 - x}$, $y(1) = 0$, $a = 1$, $b = 2$.

Методом Адамса продолжить на два шага таблицу значений решений следующих уравнений с начальными условиями $x(0) = 0$. Взять шаг вычислений $h = 0{,}1$. «Начальный отрезок» найти методом Рунге — Кутта (см. § 7, задачи 2—8).

3. $x' = \dfrac{\cos bt}{a + x^2}$, $a = 1{,}0 + 0{,}4\cdot n$, $n = 0, 1, \ldots, 5$, $b = 1{,}0 + 0{,}8\cdot k$, $k = 0, 1, 2$.

4. $x' = \dfrac{a}{t^2 + x^2 + b}$, $a = 1{,}0 + 0{,}4\cdot n$, $n = 0, 1, \ldots, 5$, $b = 1{,}0 + 0{,}4\cdot k$, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

5. $x' = e^{-at}(x^2 + b)$, $a = 1{,}0 + 0{,}4\cdot n$, $n = 0, 1, \ldots, 5$; $b = 1{,}0 + 0{,}4\cdot k$, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

6. $x' = \cos(at + x) + (t - x)$, $a = 1{,}0 + 0{,}4\cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

7. $x' = 1 - \sin(at + x) + \frac{bx}{2+t}$, $a = 1{,}0 + 0{,}4 \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$, $b = 1{,}0 + 0{,}8n$, $n = 0, 1, 2$.

8. $x' = \frac{\cos x}{a+t} + x^2$, $a = 1{,}0 + 0{,}4 \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

9. $x' = 1 + ax \sin t - x^2$, $a = 1{,}0 + 0{,}4 \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

Методом Адамса продолжить на два шага таблицу значений решений следующих систем с заданными начальными условиями. Взять шаг вычислений $h = 0{,}1$. «Начальный отрезок» найти методом Рунге—Кутта (см. § 7, задачи 9—13).

10. $\left.\begin{aligned} x' &= \cos(x + ay) + b, \\ y' &= \frac{a}{t + bx^2} + t + 1, \end{aligned}\right\}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0{,}05$, $a = 2{,}0 + 0{,}5 \cdot n$, $n = 0, 1, 2, 3$, $b = 2{,}0 + 0{,}5 \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

11. $\left.\begin{aligned} x' &= \sin(ax^2) + t + y, \\ y' &= t + x - by^2 + 1, \end{aligned}\right\}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0{,}5$, $a = 2{,}0 + 0{,}5 \cdot n$, $n = 0, 1, 2, 3$, $b = 2{,}0 + 0{,}5 \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

12. $\left.\begin{aligned} x' &= \sqrt{t^2 + ax^2} + y, \\ y' &= \cos(by) + x, \end{aligned}\right\}$ $x(0) = 0{,}5$, $y(0) = 1$, $a = 2{,}0 + 0{,}5 \cdot n$, $n = 0, 1, 2, 3$, $b = 2{,}0 + 0{,}5 \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

13. $\left.\begin{aligned} x' &= e^{-(x^2+y^2)} + at, \\ y' &= bx^2 + y, \end{aligned}\right\}$ $x(0) = 0{,}5$, $y(0) = 1$, $a = 2{,}0 + 0{,}5 \cdot n$, $n = 0, 1, 2, 3$, $b = 2{,}0 + 0{,}5 \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

14. $\left.\begin{aligned} x' &= \ln\left(bt + \sqrt{a^2t^2 + y^2}\right), \\ y' &= \sqrt{a^2t^2 + x^2}, \end{aligned}\right\}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0{,}5$, $a = 2{,}0 + 0{,}5 \cdot n$, $n = 0, 1, 2, 3$, $b = 2{,}0 + 0{,}5 \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

15. Методом Адамса найти значения решений следующих дифференциальных уравнений при $x = 0{,}2$. В качестве «начального отрезка» использовать значения, полученные в задаче 14 § 2.

а) $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0{,}5$,

б) $\left.\begin{aligned} y' &= xy + z, \\ z' &= y - z, \end{aligned}\right\}$ $y(0) = 0$, $z(0) = 1$,

в) $\left.\begin{aligned} y' &= x + z^2, \\ z' &= xy, \end{aligned}\right\}$ $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

§ 9. Метод Милна

Пусть для уравнения (8.1) кроме начального условия $y(x_0) = y_0$ известен «начальный отрезок», т. е. значения искомой функции $y(x_i) = y_i$ в точках $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, 3$ (их можно найти одним из методов, изложенных выше). Последующие значения y_i при $i = 4, 5, \ldots$ определяются следующим образом (см. [13]). Для предсказания используется *первая формула Милна*

$$y_i^{\text{пред}}=y_{i-4}+\frac{4h}{3}(2y'_{i-3}-y'_{i-2}+2y'_{i-1}). \tag{9.1}$$

Используя $y_i^{\text{пред}}$, находим $y'_i=f(x_i, y_i^{\text{пред}})$ и производим уточнение (коррекцию) по *второй формуле Милна*

$$y_i^{\text{кор}}=y_{i-2}+\frac{h}{3}(y'_{i-2}+4y'_{i-1}+y'_i). \tag{9.2}$$

Абсолютная погрешность ε_i более точного значения $y_i^{\text{кор}}$ приближенно определяется по формуле

$$\varepsilon_i\approx\frac{1}{29}\left|y_i^{\text{кор}}-y_i^{\text{пред}}\right|. \tag{9.3}$$

Эта формула позволяет на каждом шаге контролировать точность полученного результата. Если искомое решение требуется найти с точностью до ε и окажется, что $\varepsilon_i\leqslant\varepsilon$, то можем положить

$$y_i\approx y_i^{\text{кор}}$$

и перейти к вычислению y_{i+1}. В противном случае следует уменьшить шаг h.

Остаточные члены формул (9.1), (9.2) имеют порядок $O(h^5)$ на каждом шаге и порядок $O(h^4)$ на всем отрезке $[x_0, x_n]$.

Метод Милна можно использовать для приближенного решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, а также уравнений высших порядков, которые предварительно следует преобразовать в такие системы.

Пример 9.1. Методом Милна найти с точностью до $3\cdot10^{-4}$ на отрезке $[0, 1]$ решение уравнения

$$xy''+y'+xy=0 \tag{9.4}$$

с начальными условиями $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Решение. Преобразуем уравнение (9.4) в систему. В данном случае выгодно применить подстановку $xy'=z$. В результате получим систему

$$\left.\begin{aligned} y'&=\frac{z}{x},\\ z'&=-xy \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

с начальными условиями $y(0)=1$, $z(0)=0$.

Примем шаг расчета $h=0{,}2$. Для получения начального отрезка воспользуемся ответом задачи 12 § 2, где решение уравнения (9.4) дается в виде ряда. Возьмем $y(x)$ в виде отрезка этого ряда, сохраняя те члены, которые в точке $x_3=0{,}6$ дают значение, большее чем 10^{-4}:

$$y(x)\approx1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}.$$

Тогда $z'(x) \approx -x + \frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{64}$; сохраняя только члены, превосходящие 10^{-4} в точке $x_3 = 0{,}6$, получаем

$$z(x) \approx -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{384}.$$

Порядок заполнения таблицы.

1) Составляем таблицу значений $y(x)$ и $z(x)$ при $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}6$ и записываем их в табл. 9.1 с четырьмя знаками.

2) Вычисляем $y'_i = z_i/x_i$, $z'_i = -x_i y_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Таблица 9.1

Решение системы (9.5) методом Милна

i	x_i	y_i	z_i	y'_i	z'_i	Разности y	Разности z	
0	0	1	0	0	0			
1	0,2	0,9900	—0,01990	—0,0995	—0,1980			
2	0,4	0,9604	—0,07841	—0,1960	—0,3842			
3	0,6	0,9120	—0,17202	—0,2867	—0,5472			
4	0,8	0,8463	—0,2950	—0,3688	—0,6770	—0,1537	—0,2950	предсказание
		0,8463	—0,2951	—0,3689	—0,6770	—0,1141	—0,2167	коррекция
5	1,0	0,7652	—0,4400	—0,4400	—0,7652			предсказание
		0,7652	—0,4400					коррекция

3) Вычисляем на машине предсказанные «разности y» и «разности z» по формуле (9.1):

$$y_4^{\text{пред}} - y_0 = \frac{4h}{3}(2y'_1 - y'_2 + 2y'_3) = -0{,}1537,$$

$$z_4^{\text{пред}} - z_0 = \frac{4h}{3}(2z'_1 - z'_2 + 2z'_3) = -0{,}2950.$$

Эти результаты вписываем в строку $i = 4$.

4) Вычисляем предсказанные значения искомых функций в точке $x_4 = 0{,}8$:

$$y_4^{\text{пред}} = 1 - 0{,}1537 = 0{,}8463,$$

$$z_4^{\text{пред}} = 0 - 0{,}2950 = -0{,}2950.$$

Записываем их в строку $i = 4$ и находим $y'_4 = \frac{z_4^{\text{пред}}}{x_4}$, $z'_4 = -x_4 y_4^{\text{пред}}$.

5) Вычисляем на машине скорректированные «разности y» и «разности z» по формуле (9.2):

$$y_4^{\text{кор}} - y_2 = \frac{h}{3}(y'_2 - 4y'_3 + y'_4) = -0{,}1141,$$

$$z_4^{\text{кор}} - z_2 = \frac{h}{3}(z'_2 - 4z'_3 + z'_4) = -0{,}2167.$$

Эти результаты вписываем в строку $i = 4$.

6) Вычисляем скорректированные значения искомых функций в точке $x_4 = 0{,}8$:

$$y_4^{\text{кор}} = 0{,}9604 - 0{,}1141 = 0{,}8463,$$
$$z_4^{\text{кор}} = -0{,}0784 - 0{,}2167 = -0{,}2951.$$

7) Так как расхождения между предсказанными и скорректированными значениями не превосходят 10^{-4}, то полагаем

$$y_4 = 0{,}8463, \qquad z_4 = -0{,}2951$$

и продолжаем расчет при $i = 5$.

Замечание. Метод Милна не обладает устойчивостью, поэтому его рекомендуют применять только тогда, когда предполагаемое число шагов невелико.

ЗАДАЧИ

Методом Милна с точностью до 10^{-4} на отрезке $[a, b]$ найти решения следующих уравнений при заданных начальных условиях. «Начальный отрезок» найти одним из рассмотренных ранее методов.

1. $y' = -\frac{y}{x} - \frac{2y^2}{\alpha}\ln x$, $y(1) = 1$, $a = 1$, $b = 2$, $\alpha = 0{,}5 + 0{,}25\cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 20$.

2. $y' = \frac{1}{\alpha\cos x} - y\,\mathrm{tg}\,x$, $y(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0{,}2 + 0{,}01\cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 20$.

§ 10. Метод А. Н. Крылова отыскания «начального отрезка»

Применение методов Адамса и Милна предполагает наличие четырех начальных значений искомой функции.

Если правая часть уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{10.1}$$

задана аналитически, то необходимые начальные значения можно найти с помощью любого из рассмотренных ранее методов (методы последовательных приближений, степенных рядов или Рунге — Кутта). Но если правая часть уравнения (10.1) задана таблично (что, например, имеет место в задачах внешней баллистики), то ни один из этих методов не применим. В этом случае для построения «начального отрезка» оказывается весьма удобным метод последовательных сближений (см. [13], [20]), предложенный А. Н. Крыловым и модифицированный Милном.

Обозначим, как и выше,

$$x_i = x_0 + ih, \qquad y_i = y(x_i), \qquad y'_i = f(x_i, y_i),$$
$$q_i = hy'_i = hf(x_i, y_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

В основе рассматриваемого метода лежит итерационная обработка узлов с помощью приведенных выше формул Эйлера, Адамса и Милна.

Порядок решения задачи.

I. Первое сближение. По формуле Эйлера полагаем

$$\Delta y_0^{(1)} = q_0 = hf(x_0,\ y_0), \qquad \Delta y_{-1}^{(1)} = q_0$$

и вычисляем

$$y_1^{(1)} = y_0 + \Delta y_0^{(1)}, \qquad y_{-1}^{(1)} = y_0 - \Delta y_{-1}^{(1)}.$$

После этого находим $q_1^{(1)} = hf(x_1,\ y_1^{(1)})$, $q_{-1}^{(1)} = hf(x,\ y_{-1}^{(1)})$ и составляем разности $\Delta q_0^{(1)} = q_1^{(1)} - q_0$, $\Delta q_{-1}^{(1)} = q_0 - q_{-1}^{(1)}$, $\Delta^2 q_{-1}^{(1)} = \Delta q_0^{(1)} - \Delta q_{-1}^{(1)}$. Все результаты записываем в раздел I табл. 10.1.

Таблица 10.1

Вычисления «начального отрезка» методом последовательных сближений

Номер сближения	i	x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
I	-1 0 1	x_{-1} x_0 x_1	$y_{-1}^{(1)}$ y_0 $y_1^{(1)}$	$\Delta y_{-1}^{(1)}$ $\Delta y_0^{(1)}$	$q_{-1}^{(1)}$ q_0 $q_1^{(1)}$	$\Delta q_{-1}^{(1)}$ $\Delta q_0^{(1)}$	$\Delta^2 q_{-1}^{(1)}$	
II	-1 0 1 2	x_{-1} x_0 x_1 x_2	$y_{-1}^{(2)}$ y_0 $y_1^{(2)}$ $y_2^{(2)}$	$\Delta y_{-1}^{(2)}$ $\Delta y_0^{(2)}$ $\Delta y_1^{(2)}$	$q_{-1}^{(2)}$ q_0 $q_1^{(2)}$ $q_2^{(2)}$	$\Delta q_{-1}^{(2)}$ $\Delta q_0^{(2)}$ $\Delta q_1^{(2)}$	$\Delta^2 q_{-1}^{(2)}$ $\Delta^2 q_0^{(2)}$	$\Delta^3 q_{-1}^{(2)}$
III	0 1 2 3	x_0 x_1 x_2 x_3	y_0 $y_1^{(3)}$ $y_2^{(3)}$ $y_3^{(3)}$	$\Delta y_0^{(3)}$ $\Delta y_1^{(3)}$ $\Delta y_2^{(3)}$	q_0 $q_1^{(3)}$ $q_2^{(3)}$ $q_3^{(3)}$	$\Delta q_0^{(3)}$ $\Delta q_1^{(3)}$ $\Delta q_2^{(3)}$	$\Delta^2 q_0^{(3)}$ $\Delta^2 q_1^{(3)}$	$\Delta^3 q_0^{(3)}$

II. Второе сближение. Уточняем значения Δy_0 и Δy_{-1} по интерполяционной формуле Адамса (8.3) и формуле коррекции Милна (9.2), отбрасывая все разности порядка выше второго:

$$\Delta y_0^{(2)} = q_0 + \frac{1}{2}\Delta q_0^{(1)} - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{-1}^{(1)}, \qquad \Delta y_{-1}^{(2)} = q_0 - \frac{1}{2}\Delta q_{-1}^{(1)} - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{-1}^{(1)},$$

так что

$$\Delta y_{-1}^{(2)} + \Delta y_0^{(2)} = y_1 - y_{-1} = 2q_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 q_{-1}^{(1)} = \frac{1}{3}(q_{-1}^{(1)} + 4q_0 + q_1^{(1)}).$$

Затем предсказываем значение $\Delta y_1^{(2)}$ по экстраполяционной формуле Адамса (8.2):

$$\Delta y_1^{(2)} = q_1^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta q_0^{(1)} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{-1}^{(1)}.$$

Это позволяет вычислить следующие приближения:

$$y_{-1}^{(2)} = y_0 - \Delta y_{-1}^{(2)},$$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \Delta y_0^{(2)}, \qquad y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + \Delta y_1^2,$$

в результате чего можно найти

$$q_{-1}^{(2)} = hf(x,\ y_{-1}^{(2)}), \qquad q_1^{(2)} = hf(x_1,\ y_1^{(2)}), \qquad q_2^{(2)} = hf(x_2,\ y_2^{(2)}).$$

Записываем эти результаты в раздел II табл. 10.1 и вычисляем разности $\Delta q_{-1}^{(2)}$, $\Delta q_0^{(2)}$, $\Delta q_1^{(2)}$, $\Delta^2 q_{-1}^{(2)}$, $\Delta^2 q_0^{(2)}$, $\Delta^3 q_{-1}^{(2)}$.

III. Третье сближение. Теперь мы имеем достаточное количество точек для продолжения расчета, но надо еще уточнить найденные точки по полным формулам (8.2) и (8.3). Это дает

$$\Delta y_0^{(3)} = q_0 + \frac{1}{2}\Delta q_0^{(2)} - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{-1}^{(2)} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{-1}^{(2)},$$

$$\Delta y_1^{(3)} = q_1^{(2)} + \frac{1}{2}\Delta q_1^{(2)} - \frac{1}{12}\Delta^2 q_0^{(2)} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{-1}^{(2)}.$$

Теперь мы можем найти также $\Delta y_2^{(3)}$ по формуле Адамса

$$\Delta y_2^{(3)} = q_2^{(2)} + \frac{1}{2}\Delta q_1^{(2)} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_0^{(2)} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{-1}^{(2)}.$$

Отсюда получим

$$y_1^{(3)} = y_0 + \Delta y_0^{(3)}, \qquad y_2^{(3)} = y_1^{(3)} + \Delta y_1^{(3)}, \qquad y_3^{(3)} = y_2^{(3)} + \Delta y_2^{(3)}.$$

Далее вычисляем $q_1^{(3)}$, $q_2^{(3)}$, $q_3^{(3)}$, записываем результаты в раздел III табл. 10.1 и вычисляем разности $\Delta q_0^{(3)}$, $\Delta q_1^{(3)}$, $\Delta q_2^{(3)}$ и т. д.

Если шаг вычислений h выбран верно, то новый пересчет по формулам Адамса не должен существенно изменять значения Δy_0, Δy_1. Тогда остается только уточнить $\Delta y_2^{(3)}$ и пересчитать значения y_3, q_3, Δq_2, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$. После этого можно продолжать расчет.

Замечание. Если правая часть уравнения (10.1) задана аналитически слишком громоздкими формулами, метод последовательных сближений дает выигрыш во времени по сравнению с методом Рунге—Кутта при той же степени точности. Действительно, по методу Рунге—Кутта приходится на каждом шаге вычислять значения функции $f(x, y)$ четыре раза, а для получения трех начальных значений—12 раз, тогда как при вычислении «начального отрезка» методом А. Н. Крылова значения функции $f(x, y)$ вычисляются семь раз.

Пример 10.1. Найти численное решение уравнения

$$y' = 2x + y \tag{10.2}$$

с начальным условием $y(0) = 0{,}1$, приняв шаг $h = 0{,}1$.

Решение. Численное решение данного уравнения определим по методу Адамса, вычислив «начальный отрезок» методом Крылова. Все расчеты проведены в табл. 10.2 с точностью до 10^{-4}.

Таблица 10.2

Решение уравнения (10.2) методом Адамса — Крылова

Номер сближения	i	x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
I	—1	—0,1	0,0900	0,0100	—0,0110	210	0	
	0	0,0	0,1000	0,0100	0,0100	210		
	1	0,1	0,1100		0,0310			
II	—1	—0,1	0,1005	—0,0005	—0,0100	200	20	3
	0	0,0	0,1000	0,0205	0,0100	220	23	
	1	0,1	0,1205	0,0425	0,0320	243		
	2	0,2	0,1630		0,0563			
III	0	0	0,100	0,0208	0,0100	221	23	2
	1	0,1	0,1208	0,0440	0,0321	244	25	4
	2	0,2	0,1648	0,0697	0,0565	269	29	3
	3	0,3	0,2345	0,0980	0,0834	298	32	2
IV	4	0,4	0,3325	0,1295	0,1132	330	34	
	5	0,5	0,4620	0,1641	0,1462	364		
	6	0,6	0,6261		0,1826			

Порядок заполнения таблицы.

I. Первое сближение. Записываем в раздел I табл. 10.2 $x_1 = -0{,}1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$ и вычисляем

$$\Delta y_{-1}^{(1)} = \Delta y_0^{(1)} = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}0100,$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \Delta y_0^{(1)} = 0{,}1 + 0{,}0100 = 0{,}1100, \quad y_{-1}^{(1)} = 0{,}1 - 0{,}0100 = 0{,}0900,$$

$$q_1^{(1)} = 0{,}1\,(2x_1 + y_1^{(1)}) = 0{,}1\,(0{,}2 + 0{,}110) = 0{,}0310,$$

$$q_{-1}^{(1)} = 0{,}1\,(-0{,}2 + 0{,}090) = -0{,}0110,$$

а также все разности величин q.

II. Второе сближение.

$$\Delta y_{-1}^{(2)} = 0{,}0100 - 0{,}5 \cdot 0{,}0210 = -0{,}0005,$$

$$\Delta y_0^{(2)} = 0{,}0100 + 0{,}5 \cdot 0{,}0210 = 0{,}0205,$$

$$\Delta y_1^{(2)} = 0{,}0310 + 0{,}5 \cdot 0{,}0210 = 0{,}0425.$$

Тогда

$$y_{-1}^{(2)} = 0{,}1000 + 0{,}0005 = 0{,}1005, \qquad y_1^{(2)} = 0{,}1000 + 0{,}0205 = 0{,}1205,$$

$$y_2^{(2)} = 0{,}1205 + 0{,}0425 = 0{,}1630.$$

Вычисляем

$$q_{-1}^{(2)} = 0{,}1\,(2x_{-1} + y_{-1}^{(2)}) = 0{,}1\,(-0{,}2 + 0{,}1005) = -0{,}0100,$$

$$q_1^{(2)} = 0{,}1\,(2x_1 + y_1^{(2)}) = 0{,}1\,(0{,}2 + 0{,}1205) = 0{,}0320,$$

$$q_2^{(2)} = 0{,}1\,(2x_2 + y_2^{(2)}) = 0{,}1\,(0{,}4 + 0{,}1630) = 0{,}0563.$$

Записываем результаты в раздел II таблицы и вычисляем разности.

III. Третье сближение.

$$\Delta y_0^{(3)} = 0{,}0100 + \frac{1}{2}\,0{,}0220 - \frac{1}{12}\,0{,}0020 = 0{,}0208,$$

$$\Delta y_1^{(3)} = 0{,}0320 + \frac{1}{2}\,0{,}0243 - \frac{1}{12}\,0{,}0023 = 0{,}0440,$$

$$\Delta y_2^{(3)} = 0{,}0563 + \frac{1}{2}\,0{,}0243 + \frac{5}{12}\,0{,}0023 + \frac{3}{8}\,0{,}0003 = 0{,}0695.$$

Тогда

$$y_1^{(3)} = 0{,}1000 + 0{,}0208 = 0{,}1208,$$
$$y_2^{(3)} = 0{,}1208 + 0{,}0440 = 0{,}1648,$$
$$y_3^{(3)} = 0{,}1648 + 0{,}0695 = 0{,}2343.$$

Вычисление значений q и их разностей показывает, что шаг расчета выбран правильно и «начальный отрезок» получен с достаточной точностью (с погрешностью не более $3 \cdot 10^{-4}$).

IV. Продолжение расчета. На этом вычисление «начального отрезка» закончено. Дальнейшие вычисления ведем по методу Адамса. Сначала уточняем y_3:

$$\Delta y_2^{\text{кор}} = 0{,}0565 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0269 - \frac{1}{12} \cdot 0{,}0025 = 0{,}0697,$$

$$y_3^{\text{кор}} = 0{,}1648 + 0{,}0697 = 0{,}2345.$$

Далее при $i = 4$ получаем

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\,\Delta q_2 + \frac{5}{12}\,\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\,\Delta^3 q_0 =$$

$$= 0{,}0834 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0269 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}0025 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}0002 = 0{,}0980.$$

Тогда $y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 0{,}2343 + 0{,}980 = 0{,}3323$, причем коррекция приводит к тому же самому значению.

Вычисления при $i = 5$, 6 проводятся аналогично. После этого целесообразно дальнейшие вычисления проводить с вдвое большим шагом $h = 0{,}2$, используя в качестве «начального отрезка» найденные значения решения при $x = 0{,}0$; $0{,}2$; $0{,}4$; $0{,}6$.

Пример 10.2. На отрезке $[0; 0{,}6]$ найти численное решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y \end{aligned}\right\} \qquad (10.3)$$

с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ с точностью до $5 \cdot 10^{-4}$.

Решение. Выберем шаг расчета $h = 0{,}1$ и обозначим

$$f_1(x,\ y) = x + y, \quad f_2(x,\ y) = -x + y, \quad p = hf_1,\ q = hf_2.$$

Все вычисления «начальных отрезков» по методу Крылова и дальнейшие вычисления по методу Адамса расположены в табл. 10.3 и 10.4.

Порядок заполнения таблиц.

I. Первое сближение. Записываем в таб. 10.3 и 10.4 начальные значения $t_0=0$, $x_0=1$, $y_0=0$ и вычисляем

$$p_0=0{,}1\cdot 1=0{,}1,\quad q_0=0{,}1\,(-1)=-0{,}1.$$

По формулам первого сближения получаем

$$\Delta x_{-1}^{(1)}=\Delta x_0^{(1)}=p_0=0{,}1,\quad \Delta y_{-1}^{(1)}=\Delta y_0^{(1)}=q_0=-0{,}1,$$

откуда

$$x_{-1}^{(1)}=1-0{,}1=0{,}9,\quad y_{-1}^{(1)}=0{,}1,$$
$$x_1^{(1)}=1+0{,}1=1{,}1,\quad y_1^{(1)}=-0{,}1.$$

Далее вычисляем

$$p_{-1}^{(1)}=0{,}1\,(0{,}9+0{,}1)=0{,}1,\quad q_{-1}^{(1)}=0{,}1\,(-0{,}9+0{,}1)=-0{,}08,$$
$$p_1^{(1)}=0{,}1\,(1{,}1-0{,}1)=0{,}1,\quad q_1^{(1)}=0{,}1\,(-1{,}1-0{,}1)=-0{,}12$$

и соответствующие разности.

II. Второе сближение. По результатам, полученным в первом сближении, вычисляем

$$\Delta x_{-1}^{(2)}=p_0-\frac{1}{2}\,\Delta p_{-1}-\frac{1}{12}\,\Delta^2 p_{-1}=0{,}1,$$
$$\Delta x_0^{(2)}=p_0+\frac{1}{2}\,\Delta p_0-\frac{1}{12}\,\Delta^2 p_{-1}=0{,}1,$$
$$\Delta x_1^{(2)}=p_1+\frac{1}{2}\,\Delta p_0+\frac{5}{12}\,\Delta^2 p_{-1}=0{,}1,$$
$$\Delta y_{-1}^{(2)}=-0{,}10-\frac{1}{2}\,(-0{,}02)=-0{,}09,$$
$$\Delta y_0^{(2)}=-0{,}10+\frac{1}{2}\,(-0{,}02)=-0{,}11,$$
$$\Delta y_1^{(2)}=-0{,}12+\frac{1}{2}\,(-0{,}02)=-0{,}13,$$

откуда

$$x_{-1}^{(2)}=0{,}9,\quad y_{-1}^{(2)}=+0{,}09,$$
$$x_1^{(2)}=1{,}1,\quad y_1^{(2)}=-0{,}11,$$
$$x_2^{(2)}=1{,}2,\quad y_2^{(2)}=-0{,}24.$$

Далее вычисляем

$$p_{-1}^{(2)}=0{,}1\,(0{,}9+0{,}09)=0{,}099,\quad q_{-1}^{(2)}=0{,}1\,(-0{,}9+0{,}09)=-0{,}081,$$
$$p_1^{(2)}=0{,}1\,(1{,}1-0{,}11)=0{,}099,\quad q_1^{(2)}=0{,}1\,(-1{,}1-0{,}11)=-0{,}121,$$
$$p_2^{(2)}=0{,}1\,(1{,}2-0{,}24)=0{,}096,\quad q_2^{(2)}=0{,}1\,(-1{,}2-0{,}24)=-0{,}144$$

и соответствующие разности.

III. Третье сближение. По результатам, полученным во втором сближении, вычисляем

$$\Delta x_0^{(3)}=p_0+\frac{1}{2}\,\Delta p_0-\frac{1}{12}\,\Delta^2 p_{-1}-\frac{1}{24}\,\Delta^3 p_{-1}=0{,}0997,$$
$$\Delta x_1^{(3)}=p_1+\frac{1}{2}\,\Delta p_1-\frac{1}{12}\,\Delta^2 p_0-\frac{1}{24}\,\Delta^3 p_{-1}=0{,}0977,$$
$$\Delta x_2^{(3)}=p_2+\frac{1}{2}\,\Delta p_1+\frac{5}{12}\Delta^2 p_0+\frac{3}{8}\,\Delta^3 p_{-1}=0{,}0939,$$
$$\Delta y_0^{(3)}=-0{,}100+\frac{1}{2}\,(-0{,}021)-\frac{1}{12}\,(-0{,}002)=-0{,}1103,$$

Таблица 10.3

Решение системы (10.3) методом Адамса — Крылова. Вычисление $x(t)$

Номер сближения	i	t	x	Δx	$f_1(x, y)$	p	Δp	$\Delta^2 p$	$\Delta^3 p$
I	—1	—0,1	0,9	0,1	1,0	0,10	0	0	
	0	0,0	1,0	0,1	1,0	0,10	0		
	1	0,1	1,1		1,0	0,10			
II	—1	—0,1	0,9	0,1	0,89	0,099	1	—2	0
	0	0,0	1,0	0,1	1,00	0,100	—1	—2	
	1	0,1	1,1	0,1	0,99	0,099	—3		
	2	0,2	1,2		0,96	0,096			
III	0	0,0	1,0000	0,0997	1,0000	0,1000	—11	—23	—5
	1	0,1	1,0997	0,0977	0,9894	0,0989	—34	—28	
	2	0,2	1,1974	0,0939	0,9548	0,0955	—62		
	3	0,3	1,2913		0,8926	0,0893			
IV	0	0,0	1,0000	0,0996	1,0000	0,1000	—11	—24	—4
	1	0,1	1,0996	0,0974	0,9893	0,0989	—35	—28	
	2	0,2	1,1970	0,0927	0,9544	0,0954	—63		—7
	3	0,3	1,2897		0,8908	0,0891		—35	
Коррекция	3	0,3	1,2895	0,0846			—98		—4
Предсказание	4	0,4	1,3741		0,7933	0,0793		—39	
Коррекция	4	0,4	1,3740	0,0726			—137		—5
Предсказание	5	0,5	1,4466		0,6562	0,0656		—44	
Коррекция	5	0,5	1,4468	0,0570			—181		
Предсказание	6	0,6	1,5038		0,4748	0,0475			
Коррекция	6	0,6	1,5038						

$$\Delta y_1^{(3)} = -0,121 + \frac{1}{2}(-0,023) - \frac{1}{12}(-0,002) = -0,1323,$$

$$\Delta y_2^{(3)} = -0,144 + \frac{1}{2}(-0,023) + \frac{5}{12}(-0,002) = -0,1561,$$

откуда

$$x_1^{(3)} = 1,0997, \qquad y_1^{(3)} = -0,1103,$$
$$x_2^{(3)} = 1,1974, \qquad y_2^{(3)} = -0,2426,$$
$$x_3^{(3)} = 1,2913, \qquad y_3^{(3)} = -0,3987.$$

Далее вычисляем

$$p_1^{(3)} = 0,1\,(1,0997 - 0,1103) = 0,0989, \qquad q_1^{(3)} = -0,1210,$$
$$p_2^{(3)} = 0,1\,(1,1974 - 0,2426) = 0,0955, \qquad q_2^{(3)} = -0,1440,$$
$$p_3^{(3)} = 0,1\,(1,2913 - 0,3987) = 0,0893, \qquad q_3^{(3)} = -0,1690$$

и соответствующие разности.

Таблица 10.4

Решение системы (10.3) методом Адамса — Крылова. Вычисление $y(t)$

Номер сближения	i	t	y	Δy	$f_2(x, y)$	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
I	—1	—0,1	0,1	—0,1	—0,8	—0,08	—2	0	
	0	0,0	0,0	—0,1	—1,0	—0,10	—2		
	1	0,1	—0,1		—1,2	—0,12			
II	—1	—0,1	0,09	—0,09	—0,81	—0,081	—19	—2	0
	0	0,0	0,00	—0,11	—1,00	—0,100	—21	—2	
	1	0,1	—0,11	—0,13	—1,21	—0,121	—23		
	2	0,2	—0,24		—1,44	—0,144			
III	0	0,0	0,0000	—0,1103	—1,0000	—0,1000	—210	—20	0
	1	0,1	—0,1103	—0,1323	—1,2100	—0,1210	—230	—20	0
	2	0,2	—0,2426	—0,1561	—1,4400	—0,1440	—250	—20	
	3	0,3	—0,3987		—1,6900	—0,1690			
IV	0	0,0	0,0000	—0,1103	—1,0000	—0,1000	—210	—20	1
	1	0,1	—0,1103	—0,1323	—1,2099	—0,1210	—230	—19	
	2	0,2	—0,2426	—0,1563	—1,4396	—0,1440	—249		2
	3	0,3	—0,3989		—1,6886	—0,1689		—17	
Коррекция	3	0,3	—0,3989	—0,1819			—266		1
Предсказание	4	0,4	—0,5808		—1,9549	—0,1955		—16	
Коррекция	4	0,4	—0,5810	—0,2094			—282		2
Предсказание	5	0,5	—0,7904		—2,2370	—0,2237		—14	
Коррекция	5	0,5	—0,7905	—0,2385			—296		
Предсказание	6	0,6	—1,0290		—2,5328	—0,2533			
Коррекция	6	0,6	—1,0289						

IV. Четвертое сближение производим для контроля. Получаем

$$\Delta x_0^{(4)} = p_0 + \frac{1}{2}\Delta p_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 p_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 p_0 = 0{,}0996,$$

$$\Delta x_1^{(4)} = p_1 + \frac{1}{2}\Delta p_1 - \frac{1}{12}\Delta^2 p_0 - \frac{1}{24}\Delta^3 p_0 = 0{,}0974,$$

$$\Delta x_2^{(4)} = p_2 + \frac{1}{2}\Delta p_2 - \frac{1}{12}\Delta^2 p_1 - \frac{1}{24}\Delta^3 p_0 = 0{,}0927,$$

$$\Delta y_0^{(4)} = -0{,}1000 + \frac{1}{2}(-0{,}0210) - \frac{1}{12}(-0{,}0020) = -0{,}1103,$$

$$\Delta y_1^{(4)} = -0{,}1210 + \frac{1}{2}(-0{,}0230) - \frac{1}{12}(-0{,}0020) = -0{,}1323,$$

$$\Delta y_2^{(4)} = -0{,}1440 + \frac{1}{2}(-0{,}0250) - \frac{1}{12}(-0{,}0020) = -0{,}1563,$$

откуда

$$x_1^{(4)}=1{,}0996,\qquad y_1^{(4)}=-0{,}1103,$$
$$x_2^{(4)}=1{,}1970,\qquad y_2^{(4)}=-0{,}2426,$$
$$x_3^{(4)}=1{,}2897,\qquad y_3^{(4)}=-0{,}3989.$$

Далее вычисляем

$$p_1^{(4)}=0{,}1\,(1{,}0996-0{,}1103)=0{,}0989,\qquad q_1^{(4)}=-0{,}1210,$$
$$p_2^{(4)}=0{,}1\,(1{,}1970-0{,}2426)=0{,}0954,\qquad q_2^{(4)}=-0{,}1440,$$
$$p_3^{(4)}=0{,}1\,(1{,}2897-0{,}3989)=0{,}0891,\qquad q_3^{(4)}=-0{,}1689$$

и соответствующие разности.

Так как результаты третьего и четвертого сближений различаются только на допустимые величины, то принимаем результаты четвертого сближения за «начальный отрезок» и продолжаем расчет по методу Адамса, используя как формулу предсказания

$$\Delta x_i^{\text{пред}}=p_i+\frac{1}{2}\,\Delta p_{i-1}+\frac{5}{12}\,\Delta^2 p_{i-2}+\frac{3}{8}\,\Delta^3 p_{i-3},$$

так и формулу коррекции

$$\Delta x_i^{\text{кор}}=p_i+\frac{1}{2}\,\Delta p_i-\frac{1}{12}\,\Delta^2 p_{i-1}-\frac{1}{24}\,\Delta^3 p_{i-2}.$$

Например, сначала уточняем x_3:

$$\Delta x_2=p_2+\frac{1}{2}\,\Delta p_2-\frac{1}{12}\,\Delta^2 p_1-\frac{1}{24}\,\Delta^3 p_0=$$
$$=0{,}0954+\frac{1}{2}\,(-0{,}0063)-\frac{1}{12}\,(-0{,}0028)-\frac{1}{24}\,(-0{,}0004)=0{,}0925,$$
$$x_3^{\text{кор}}=x_2+\Delta x_2=1{,}2895.$$

Затем предсказываем x_4:

$$\Delta x_3=p_3+\frac{1}{2}\,\Delta p_2+\frac{5}{12}\,\Delta^2 p_1+\frac{3}{8}\,\Delta^3 p_3=$$
$$=0{,}0891+\frac{1}{2}\,(-0{,}0063)+\frac{5}{12}\,(-0{,}0028)+\frac{3}{8}\,(-0{,}0004)=0{,}0846,$$
$$x_4^{\text{пред}}=x_3+\Delta x_3=1{,}3741.$$

З а м е ч а н и е. Следуя тому же методу Зейделя, что и при итерационном решении систем линейных уравнений (гл. III, § 10), можно иногда ускорить процесс сближения в методе Крылова. В данном случае метод Зейделя заключается в следующем. Начиная со второго сближения, при вычислении каждой следующей разности Δx_i $(i>0)$ используются уже подсчитанные в данном сближении значения p_i, Δp_{i-1}, ...

В рассмотренном выше примере 10.2 применение метода Зейделя позволяет вести расчет с вдвое бо́льшим шагом $h=0{,}2$. Расчеты всех четырех сближений по методу Крылова с ускорением по Зейделю представлены в табл. 10.5 и 10.6.

П о р я д о к з а п о л н е н и я т а б л и ц.

I. П е р в о е с б л и ж е н и е рассчитывается так же, как и выше, но с шагом $h=0{,}2$.

II. Второе сближение проводим, начиная с точки $t=0$. Сначала по результатам первого сближения вычисляем

$$\Delta x_0^{(2)} = p_0 + \frac{1}{2}\Delta p_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 p_{-1} = 0{,}20,$$

$$\Delta y_0^{(2)} = q_0 + \frac{1}{2}\Delta q_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{-1} = -0{,}20 + \frac{1}{2}(-0{,}08) = -0{,}24,$$

что дает $x_1^{(2)} = 1{,}2, \quad y_1^{(2)} = -0{,}24$. Затем вычисляем

$$p_1^{(2)} = 0{,}2\,(1{,}20 - 0{,}24) = 0{,}192, \qquad q_1^{(2)} = 0{,}2\,(-1{,}20 - 0{,}24) = -0{,}288$$

и соответствующие разности $\Delta p_0 = -0{,}008, \quad \Delta q_0 = -0{,}088$. И только после этого вычисляем разности $\Delta x_1^{(2)}$ и $\Delta y_1^{(2)}$, используя значения p_1 и q_1 из второго сближения:

$$\Delta x_1^{(2)} = p_1 + \frac{1}{2}\Delta p_0 + \frac{5}{12}\Delta^2 p_{-1} = 0{,}192 + \frac{1}{2}(-0{,}008) = 0{,}188,$$

$$\Delta y_1^{(2)} = -0{,}288 + \frac{1}{2}(-0{,}088) = -0{,}332.$$

Далее вычисляем

$$p_2^{(2)} = 0{,}2\,(1{,}388 - 0{,}572) = 0{,}1632, \quad q_2^{(2)} = 0{,}2\,(-1{,}388 - 0{,}572) = -0{,}3920$$

и соответствующие разности.

III. Третье сближение. По результатам второго сближения находим только первую точку:

$$\Delta x_0^{(3)} = p_0 + \frac{1}{2}\Delta p_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 p_0 = 0{,}2000 + \frac{1}{2}(-0{,}0080) - \frac{1}{12}(-0{,}0208) = 0{,}1977,$$

$$\Delta y_0^{(3)} = -0{,}2000 + \frac{1}{2}(-0{,}0880) - \frac{1}{12}(-0{,}0160) = -0{,}2427,$$

$$x_1^{(3)} = 1{,}1977, \qquad y_1^{(3)} = -0{,}2427.$$

Далее вычисляем

$$p_1^{(3)} = 0{,}2\,(1{,}1977 - 0{,}2427) = 0{,}1910, \qquad q_1^{(3)} = 0{,}2\,(-1{,}1977 - 0{,}2427) = -0{,}2881$$

и соответствующие разности.

После этого находим вторую точку, используя значения p_1 и q_1 из третьего сближения (а вторые разности — из второго сближения):

$$\Delta x_1^{(3)} = 0{,}1910 + \frac{1}{2}(-0{,}0090) + \frac{5}{12}(-0{,}0208) = 0{,}1778,$$

$$\Delta y_1^{(3)} = -0{,}2881 + \frac{1}{2}(-0{,}0881) + \frac{5}{12}(-0{,}0160) = -0{,}3388,$$

$$x_2^{(3)} = 1{,}3755, \qquad y_2^{(3)} = -0{,}5815.$$

Снова подсчитываем

$$p_2^{(3)} = 0{,}2\,(1{,}3755 - 0{,}5815) = 0{,}1588, \qquad q_2^{(3)} = 0{,}2\,(-1{,}3755 - 0{,}5815) = -0{,}3914$$

и соответствующие разности.

И, наконец, находим

$$\Delta x_2^{(3)} = 0{,}1588 + \frac{1}{2}(-0{,}0322) + \frac{5}{12}(-0{,}0232) = 0{,}1330,$$

$$\Delta y_2^{(3)} = -0{,}3914 + \frac{1}{2}(-0{,}1033) + \frac{5}{12}(-0{,}0152) = -0{,}4494,$$

$$x_3^{(3)} = 1{,}5085, \qquad y_3^{(3)} = -1{,}0309.$$

После этого вычисляем p_3, q_3 и соответствующие разности.

Таблица 10.5

Решение системы (10.3) методом Крылова — Зейделя. Вычисление $x(t)$

Номер сближения	i	t	x	Δx	$f_1(x, y)$	p	Δp	$\Delta^2 p$	$\Delta^3 p$
I	—1	—0,2	0,8	0,2	1,0	0,20	0	0	
	0	0,0	1,0	0,2	1,0	0,20	0		
	1	0,2	1,2		1,0	0,20			
II	0	0,0	1,000	0,200	1,000	0,2000	— 80	—208	
	1	0,2	1,200	0,188	0,960	0,1920	—288		
	2	0,4	1,388		0,816	0,1632			
III	0	0,0	1,0000	0,1977	1,0000	0,2000	— 90	—232	—79
	1	0,2	1,1977	0,1778	0,9550	0,1910	—322	—311	
	2	0,4	1,3755	0,1330	0,7940	0,1588	—633		
	3	0,6	1,5085		0,4776	0,0955			
IV	0	0,0	1,0000	0,1971	1,0000	0,2000	— 91	—232	—82
	1	0,2	1,1971	0,1770	0,9544	0,1909	—323	—314	
	2	0,4	1,3741	0,1299	0,7930	0,1586	—637		
	3	0,6	1,5040		0,4747	0,0949			
Коррекция	3	0,6	1,5038		0,4749	0,0950			

IV. Четвертое сближение. Расчет первой точки проводится так же, как и выше, но с учетом $\Delta^3 p_0$ и $\Delta^3 q_0$ соответственно:

$$\Delta x_0^{(4)} = p_0 + \frac{1}{2}\Delta p_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 p_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 p_0 = 0,2000 - 0,0045 - 0,0019 - 0,0003 = 0,1971,$$

$$\Delta y_0^{(4)} = -0,2000 - 0,0441 + 0,0013 + 0,0001 = -0,2427,$$

$$x_1^{(4)} = 1,1971, \qquad y_1^{(4)} = -0,2427,$$

Далее, после вычисления p_1 и q_1, используем их для вычисления второй точки:

$$\Delta x_1^{(4)} = p_1 + \frac{1}{2}\Delta p_1 - \frac{1}{12}\Delta^2 p_0 - \frac{1}{24}\Delta^3 p_0 = 0,1909 - 0,0161 + 0,0019 + 0,0003 = 0,1770,$$

$$\Delta y_1^{(4)} = -0,2880 - 0,0516 + 0,0013 - 0,0001 = -0,3384,$$

$$x_2^{(4)} = 1,3741, \qquad y_2^{(4)} = -0,5811.$$

Затем вычисляем p_2 и q_2 и используем их для вычисления третьей точки:

$$\Delta x_2^{(4)} = 0,1586 - 0,0316 + 0,0026 + 0,0003 = 0,1299,$$

$$\Delta y_2^{(4)} = -0,3910 - 0,0582 + 0,0011 - 0,0001 = -0,4482,$$

$$x_3^{(4)} = 1,5040, \qquad y_3^{(4)} = -1,0293.$$

Так как различие между третьим и четвертым сближениями невелико, то подсчет сближений прекращаем. Но прежде чем продолжать расчет, надо

Таблица 10.6

Решение системы (10.3) методом Крылова — Зейделя. Вычисление $y(t)$

Номер сближения	i	t	y	Δy	$f_2(x, y)$	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
I	—1	—0,2	0,2	—0,2	—0,6	—0,12	—8	0	
	0	0,0	0,0	—0,2	—1,0	—0,20	—8		
	1	0,2	—0,2		—1,4	—0,28			
II	0	0,0	0,000	—0,240	—1,000	—0,2000	— 880	—160	
	1	0,2	—0,240	—0,332	—1,440	—0,2880	—1040		
	2	0,4	—0,572		—1,960	—0,3920			
III	0	0,0	0,0000	—0,2427	—1,0000	—0,2000	— 881	—152	20
	1	0,2	—0,2427	—0,3388	—1,4404	—0,2881	—1033	—132	
	2	0,4	—0,5815	—0,4494	—1,9570	—0,3914	—1165		
	3	0,6	—1,0309		—2,5394	—0,5079			
IV	0	0,0	0,0000	—0,2427	—1,0000	—0,2000	— 880	—150	23
	1	0,2	—0,2427	—0,3384	—1,4398	—0,2880	—1030	—127	
	2	0,4	—0,5811	—0,4482	—1,9552	—0,3910	—1157		
	3	0,6	—1,0293		—2,5333	—0,5067			
Коррекция	3	0,6	—1,0289		—2,5327	—0,5065			

уточнить последнюю полученную точку по формуле коррекции Адамса. Это дает

$$\Delta x_2 = 0{,}1586 - 0{,}0318 + 0{,}0026 + 0{,}0003 = 0{,}1297, \qquad x_3 = 1{,}5038,$$
$$\Delta y_2 = -0{,}3910 - 0{,}0578 + 0{,}0011 - 0{,}0001 = -0{,}4478, \quad y_3 = -1{,}0289.$$

ЗАДАЧИ

Применяя метод последовательных сближений и метод Адамса, найти приближенные решения дифференциальных уравнений с шагом $h = 0{,}05$ на отрезке $[0, c]$.

1. $y' = \cos^2(ax + y) + by$, $y(0) = 0$, $c = 0{,}25$, $a = 1{,}0 + 0{,}4 \cdot n$, $n = 0, 1, \ldots, 5$, $b = 1{,}0 + 0{,}4 \cdot k$, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

2. $y' = e^{-(a+xy)} + by$, $y(0) = 0$, $c = 0{,}25$, $a = 1{,}0 + 0{,}4 \cdot n$, $n = 0, 1, \ldots, 5$, $b = 1{,}0 + 0{,}4 \cdot k$, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

3. $y' = -axy$, $y(0) = 1$, $c = 0{,}2$, $a_1 = 1{,}8$, $a_2 = 2{,}0$.

4. $y' = -\dfrac{a(y+x)^k}{a(y+x)^k + 1}$, $y(0) = 0$, $c = 0{,}2$, $a = 1{,}0 + 0{,}3 \cdot n$, $n = 0, 1, 2$, $k = 1, 2, 3, 4$.

ГЛАВА IX

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Постановка задачи

Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0. \tag{1.1}$$

Двухточечная краевая задача для уравнения (1.1) ставится следующим образом: найти функцию $y=y(x)$, которая внутри отрезка $[a,\ b]$ удовлетворяет уравнению (1.1), а на концах отрезка — краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1[y(a),\ y'(a)]=0, \\ \varphi_2[y(b),\ y'(b)]=0. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Рассмотрим случай, когда уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) линейны. Такая краевая задача называется *линейной краевой задачей*. В этом случае дифференциальное уравнение и краевые условия записываются так:

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=f(x), \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=A, \\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=B, \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — известные непрерывные на отрезке $[a,\ b]$ функции, α_0, α_1, β_0, β_1, A, B — заданные постоянные, причем $|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0$ и $|\beta_0|+|\beta_1|\neq 0$.

Если $A=B=0$, то краевые условия (1.4) называются *однородными*. Методы приближенного решения поставленных краевых задач можно разбить на две группы: *разностные методы* и *аналитические методы*. Рассмотрению этих методов посвящены следующие параграфы.

§ 2. Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Пусть $x_0=a$, $x_n=b$, $x_i=x_0+ih$ $(i=1,2,\ \ldots,\ n-1)$ — система равноотстоящих узлов с некоторым шагом $h=\dfrac{b-a}{n}$ и

$$p_i=p(x_i),\quad q_i=q(x_i),\quad f_i=f(x_i).$$

Обозначим получаемые в результате расчета приближенные значения искомой функции $y(x)$ и ее производных $y'(x)$, $y''(x)$ в узлах

x_i через y_i, y'_i, y''_i соответственно. Заменим приближенно в каждом внутреннем узле производные $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ конечно-разностными отношениями

$$y'_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}, \qquad y''_i=\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h^2}, \tag{2.1}$$

а на концах положим

$$y'_0=\frac{y_1-y_0}{h}, \qquad y'_n=\frac{y_n-y_{n-1}}{h}. \tag{2.2}$$

Используя эти формулы, приближенно заменим уравнение (1.3) и краевые условия (1.4) системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}+g_iy_i=f_i \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n-2),\\ &\alpha_0y_0+\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}=A, \ \beta_0y_n+\beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=B.\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Получим линейную алгебраическую систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными. Решив ее, если это возможно, получим таблицу приближенных значений искомой функции. Условия разрешимости такой системы рассматриваются в [2] и [39].

Более точные формулы получаются, если заменить $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ центрально-разностными отношениями

$$y'_i=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}, \qquad y''_i=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}. \tag{2.4}$$

Тогда получаем систему

$$\left.\begin{aligned}&\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i\\ &\qquad\qquad (i=1, 2, \ldots, n-1),\\ &\alpha_0y_0+\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}=A, \qquad \beta_0y_n+\beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=B.\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

При большом n непосредственное решение систем (2.3), (2.5) становится громоздким. В § 3 указывается достаточно простой метод, разработанный специально для решения систем такого вида. Оценка погрешности метода конечных разностей для задачи (1.3), (1.4) имеет вид

$$|y_i-y(x_i)|\leqslant\frac{h^2M_4}{96}(b-a)^2, \tag{2.6}$$

где $y(x_i)$ — значение точного решения при $x=x_i$, $M_4=\max\limits_{[a,\,b]}|y^{(4)}(x)|$.

Точность разностного метода можно значительно повысить, если при замене производных использовать многоточечные разностные схемы (см. [39]).

В практических задачах часто встречаются уравнения, в которых функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ заданы таблично с некоторым шагом h. Совершенно естественно такие уравнения решать разностным методом с данным шагом h (см. пример 3.4).

Пример 2.1. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} x^2y''+xy'=1,\\ y(1)=0, \quad y(1{,}4)=\frac{1}{2}\ln^2(1{,}4)=0{,}0566. \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Решение. Используя формулы (2.4), заменяем уравнение (2.7) системой конечно-разностных уравнений

$$x_i^2\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+x_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}=1.$$

В результате приведения подобных членов получаем

$$y_{i-1}(2x_i^2-hx_i)-4x_i^2y_i+y_{i+1}(2x_i^2+hx_i)=2h^2. \qquad (2.8)$$

Выберем шаг h, равный 0,1. Тогда получим три внутренних узла $x_i=0{,}1\cdot i+1$ $(i=1, 2, 3)$. Написав уравнение (2.8) для каждого из этих узлов, получим систему

$$\left.\begin{aligned} 2{,}31y_0-4{,}84y_1+2{,}53y_2=0{,}02,\\ 2{,}76y_1-5{,}76y_2+3{,}00y_3=0{,}02,\\ 3{,}25y_2-6{,}76y_3+3{,}51y_4=0{,}02. \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

В граничных узлах имеем

$$y_0=0, \qquad y_4=0{,}0566.$$

Используя эти значения, решаем систему (2.9) и получаем

$$y_1=0{,}0046, \quad y_2=0{,}0167, \quad y_3=0{,}0345.$$

Для сравнения приводим значения точного решения уравнения (2.7) $y=\frac{1}{2}\ln^2 x$ в соответствующих точках: $y(x_1)=0{,}0047$, $y(x_2)=0{,}0166$, $y(x_3)=0{,}0344$.

§ 3. Метод прогонки

1. Рассмотрим систему, полученную при замене уравнения (1.3) и краевых условий (1.4) конечно-разностными отношениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}+q_iy_i=f_i \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n-2),\\ \alpha_0y_0+\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}=A, \qquad \beta_0y_n+\beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=B. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Метод прогонки решения таких систем заключается в следующем (см. [2], [13]). Запишем сначала первые $n-1$ уравнений системы (3.1) в виде

$$y_{i+2}+m_iy_{i+1}+k_iy_i=h^2f_i,$$

где

$$m_i=-2+hp_i, \qquad k_i=1-hp_i+h^2q_i \qquad (i=0, 1, \ldots, n-2). \qquad (3.2)$$

Затем написанная выше система приводится к виду

$$y_{i+1}=c_i(d_i-y_{i+2}) \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n-2). \tag{3.3}$$

Числа c_i, d_i последовательно вычисляются по формулам: при $i=0$

$$\begin{gathered} c_0=\frac{\alpha_1-\alpha_0 h}{m_0(\alpha_1-\alpha_0 h)+k_0\alpha_1}, \\ d_0=\frac{k_0 A h}{\alpha_1-\alpha_0 h}+f_0 h^2; \end{gathered} \tag{3.4}$$

при $i=1, 2, \ldots, n-2$

$$c_i=\frac{1}{m_i-k_i c_{i-1}}, \qquad d_i=f_i h^2-k_i c_{i-1} d_{i-1}. \tag{3.5}$$

Вычисления производятся в следующем порядке.

П р я м о й   х о д. По формулам (3.2) вычисляем значения m_i, k_i. Находим c_0, d_0 и затем, применяя последовательно рекуррентные формулы (3.5), получаем значения c_i, d_i при $i=1, 2, \ldots, n-2$.

О б р а т н ы й   х о д. Из уравнения (3.3) при $i=n-2$ и последнего уравнения системы (3.1) получаем

$$\begin{gathered} y_{n-1}=c_{n-2}(d_{n-2}-y_n), \\ \beta_0 y_n+\beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=B. \end{gathered}$$

Решив эту систему относительно y_n, будем иметь

$$y_n=\frac{\beta_1 c_{n-2} d_{n-2}+Bh}{\beta_1(1+c_{n-2})+\beta_0 h}. \tag{3.6}$$

Используя уже известные числа c_{n-2}, d_{n-2}, находим y_n. Затем вычисляем значения y_i $(i=n-1, \ldots, 1)$, последовательно применяя рекуррентные формулы (3.3):

$$\left.\begin{array}{l} y_{n-1}=c_{n-2}(d_{n-2}-y_n), \\ y_{n-2}=c_{n-3}(d_{n-3}-y_{n-1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1=c_0(d_0-y_2). \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

Значение y_0 находим из предпоследнего уравнения системы (3.1):

$$y_0=\frac{\alpha_1 y_1-Ah}{\alpha_1-\alpha_0 h}. \tag{3.8}$$

Таким образом, все вычисления как бы «прогоняются» два раза. Вычисления прямого хода заготавливают вспомогательные числа c_i, d_i в порядке возрастания индекса i. При этом для вычисления значений c_0, d_0 используется краевое условие на левом конце отрезка интегрирования. Затем на первом шаге обратного хода происходит согласование полученных чисел c_{n-2}, d_{n-2} с краевым условием на правом конце отрезка интегрирования, после чего последовательно получаются значения искомой функции y_i в порядке убывания индекса i.

Все вычисления метода прогонки рекомендуется располагать так, как показано в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Метод прогонки

i	x_i	m_i	k_i	f_i	Прямой ход		Обратный ход
					c_i	d_i	y_i
0	x_0	m_0	k_0	f_0	$c_0\downarrow$	$d_0\downarrow$	$\uparrow y_0$
1	x_1	m_1	k_1	f_1	$c_1\downarrow$	$d_1\downarrow$	$\uparrow y_1$
2	x_2	m_2	k_2	f_2	$c_2\downarrow$	$d_2\downarrow$	$\uparrow y_2$
...	...	...	...	...	...	...	...
$n-2$	x_{n-2}	m_{n-2}	k_{n-2}	f_{n-2}	$c_{n-2}\downarrow$	$d_{n-2}\downarrow$	$\uparrow y_{n-2}$
$n-1$	x_{n-1}						$\uparrow y_{n-1}$
n	x_n						$\uparrow y_n$

Пример 3.1. Методом прогонки найти приближенное решение уравнения

$$y''-2xy'-2y=-4x, \tag{3.9}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0)-y'(0)=0, \quad y(1)=1+e=3{,}718. \tag{3.10}$$

Решение. Возьмем $h=0{,}1$ и заменим уравнение (3.9) и краевые условия (3.10) системой конечно-разностных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{0{,}01}-2x_i\,\frac{y_{i+1}-y_i}{0{,}1}-2y_i=-4x_i \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 8), \\ &y_0-\frac{y_1-y_0}{0{,}1}=0, \qquad y_{10}=3{,}718. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

После приведения подобных членов получим

$$y_{i+2}+(-2-0{,}2x_i)\,y_{i+1}+(0{,}98+0{,}2x_i)\,y_i=-0{,}01\cdot 4x_i.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} &m_i=-2-0{,}2x_i, && \alpha_0=1, && \beta_0=1, \\ &k_i=0{,}98+0{,}2x_i, && \alpha_1=-1, && \beta_1=0, \\ &f_i=-4x_i, && A=0, && B=3{,}718. \end{aligned}$$

Порядок заполнения таблицы.

Прямой ход. Записываем в табл. 3.2 числа $x_i=0{,}1\cdot i$ и вычисляем величи́ны m_i, k_i, f_i $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ 8)$. Далее находим

$$c_0=\frac{-1-0{,}1}{-2(-1{,}1)-0{,}98}=0{,}902, \qquad d_0=0.$$

Записываем полученные числа в табл. 3.2 и приступаем к последо-

Таблица 3.2

Метод прогонки для задачи (3.9), (3.10)

i	x_i	m_i	k_i	f_i	Прямой ход		Обратный ход	$y(x_i)$
					c_i	d_i	y_i	
0	0,0	—2,00	0,98	0,0	—0,9016	0,0000	1,117	1,000
1	0,1	—2,02	1,00	—0,4	—0,8941	—0,0040	1,229	1,110
2	0,2	—2,04	1,02	—0,8	—0,8865	—0,0117	1,363	1,241
3	0,3	—2,06	1,04	—1,2	—0,8787	—0,0228	1,521	1,394
4	0,4	—2,08	1,06	—1,6	—0,8706	—0,0372	1,704	1,574
5	0,5	—2,10	1,08	—2,0	—0,8623	—0,0550	1,916	1,784
6	0,6	—2,12	1,10	—2,4	—0,8536	—0,0761	2,164	2,033
7	0,7	—2,14	1,12	—2,8	—0,8446	—0,1007	2,455	2,332
8	0,8	—2,16	1,14	—3,2	—0,8354	—0,1290	2,800	2,696
9	0,9						3,214	3,148
10	1,0						3,718	3,718

вательному вычислению c_i, d_i при $i=1, 2, \ldots, 8$. Так, при $i=1$ по формулам (3.5) будем иметь

$$c_1 = \frac{1}{m_1 - k_1 c_0} = \frac{1}{-2{,}02 + 1 \cdot 0{,}9016} = -0{,}8941,$$
$$d_1 = f_1 h^2 - k_1 c_0 d_0 = -0{,}0040.$$

При $i=2$

$$c_2 = \frac{1}{m_2 - k_2 c_1} = \frac{1}{-2{,}04 + 1{,}02 \cdot 0{,}8941} = -0{,}8865,$$
$$d_2 = f_2 h^2 - k_2 c_1 d_1 = -0{,}8 \cdot 0{,}01 - 1{,}02 \cdot 0{,}8941 \cdot 0{,}004 = -0{,}0117.$$

Ход дальнейших вычислений ясен из приведенного образца. Полученные значения c_i, d_i записываем в столбцы прямого хода табл. 3.2.

Обратный ход. По формуле (3.6) находим

$$y_{10} = \frac{B}{\beta_0} = 3{,}718.$$

После этого приступаем к последовательному вычислению значений y_i $(i=9, \ldots, 1)$ по формулам (3.7) и к заполнению столбца обратного хода табл. 3.2. Так, при $i=9$ и $i=8$ будем иметь

$$y_9 = c_8 (d_8 - y_{10}) = -0{,}8354(-0{,}129 - 3{,}718) = 3{,}214,$$
$$y_8 = c_7 (d_7 - y_9) = -0{,}8446(-0{,}101 - 3{,}214) = 2{,}800 \text{ и т. д.}$$

Значение y_0 находим по формуле (3.8)

$$y_0 = \frac{1{,}229}{1 + 0{,}1} = 1{,}117$$

и записываем в столбце y_i табл. 3.2 при $i=0$. В последнем столбце таблицы приведены для сравнения значения точного решения $y = x + e^{x^2}$.

II. Рассмотрим метод прогонки для решения системы, которая получается при замене уравнения (1.3) и второго краевого условия (1.4) *центральными конечно-разностными отношениями:*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=1,2,\ldots,n-1), \\ &\alpha_0y_0+\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}=A, \qquad \beta_0y_n+\beta_1\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}=B. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Запишем первые $n-1$ уравнений системы (3.12) в виде

$$y_{i+1}+m_iy_i+k_iy_{i-1}=\frac{2h^2f_i}{2+hp_i}=\varphi_i,$$

где

$$m_i=\frac{2q_ih^2-4}{2+hp_i}, \qquad k_i=\frac{2-hp_i}{2+hp_i}. \tag{3.13}$$

Затем приводим эти уравнения к виду

$$y_i=c_i(d_i-y_{i+1}) \qquad (i=1,2,\ldots,n-1), \tag{3.14}$$

где коэффициенты c_i, d_i вычисляются по формулам: при $i=1$

$$\left.\begin{aligned} c_1&=\frac{\alpha_1-\alpha_0h}{m_1(\alpha_1-\alpha_0h)+k_1\alpha_1}, \\ d_1&=\frac{2f_1h^2}{2+p_1h}+k_1\frac{Ah}{\alpha_1-\alpha_0h}=\varphi_1-k_1\frac{Ah}{\alpha_1-\alpha_0h}; \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

при $i=2,3,\ldots,n$

$$c_i=\frac{1}{m_i-k_ic_{i-1}}, \quad d_i=\frac{2f_ih^2}{2+hp_i}-k_ic_{i-1}d_{i-1}=\varphi_i-k_ic_{i-1}d_{i-1}. \tag{3.16}$$

Вычисления производятся в следующем порядке.

Прямой ход. По формулам (3.13) находим m_i, k_i. Вычисляем c_1, d_1, а затем по рекуррентным формулам (3.16) находим последовательно c_i, d_i $(i=2,\ldots,n)$.

Обратный ход. Запишем уравнение (3.14) при $i=n$, $i=n-1$ и последнее уравнение системы (3.12):

$$\left.\begin{aligned} &y_n=c_n(d_n-y_{n+1}), \\ &y_{n-1}=c_{n-1}(d_{n-1}-y_n), \\ &\beta_0y_n+\beta_1\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}=B. \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

Решая эту систему относительно y_n, будем иметь

$$y_n=\frac{2Bh-\beta_1(d_n-c_{n-1}d_{n-1})}{2\beta_0h+\beta_1\left(c_{n-1}-\dfrac{1}{c_n}\right)}. \tag{3.18}$$

Используя уже известные числа c_n, d_n, c_{n-1}, d_{n-1}, находим y_n. Значения $y_i\,(i=n-1,\ \ldots,\ 1)$ получаем из рекуррентных формул (3.14). Для вычисления y_0 используем предпоследнее уравнение (3.12):

$$y_0=\frac{\alpha_1y_1-Ah}{\alpha_1-\alpha_0h}. \tag{3.19}$$

Пример 3.2. Методом прогонки найти приближенное решение уравнения

$$y''-2xy'-2y=-4x, \tag{3.20}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0)-y'(0)=0, \qquad 2y(1)-y'(1)=1. \tag{3.21}$$

Решение. Примем $h=0{,}1$ и заменим уравнение (3.20) и краевые условия (3.21) системой конечно-разностных уравнений

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}-2x_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}-2y_i=-4x_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 9),$$

$$y_0-\frac{y_1-y_0}{h}=0, \quad 2y_{10}-\frac{y_{11}-y_9}{2h}=1.$$

После приведения подобных членов получаем

$$y_{i+1}-\frac{2+2h^2}{1-x_ih}y_i+\frac{1+x_ih}{1-x_ih}y_{i-1}=-\frac{4h^2}{1-x_ih}x_i.$$

Таким образом, имеем

$$m_i=-\frac{2+2h^2}{1-x_ih}, \quad k_i=\frac{1+x_ih}{1-x_ih}, \quad \varphi_i=-\frac{4h^2}{1-x_ih}x_i \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 10),$$

$$\alpha_0=1, \quad \alpha_1=-1, \quad \beta_0=2, \quad \beta_1=-1, \quad A=0, \quad B=1.$$

Прямой ход. Записываем в табл. 3.3 числа $x_i=0{,}1i$ и вычисляем значения m_i, k_i, φ_i. Затем по формулам (3.15) находим

$$c_1=\frac{-1{,}1}{2{,}040\cdot 1{,}1-1{,}020}=-0{,}899, \quad d_1=-0{,}004.$$

Записываем полученные числа в табл. 3.3 и приступаем к последовательному вычислению c_i, d_i по формулам (3.16). Так, при $i=2$

Таблица 3.3

Метод прогонки для задачи (3.20), (3.21)

i	x_i	m_i	k_i	φ_i	Прямой ход c_i	Прямой ход d_i	Обратный ход y_i	$y(x_i)$
0	0,0						1,03	1,00
1	0,1	—2,040	1,020	—0,004	—0,899	—0,004	1,13	1,11
2	0,2	—2,061	1,040	—0,008	—0,889	—0,012	1,26	1,24
3	0,3	—2,083	1,062	—0,012	—0,878	—0,023	1,41	1,39
4	0,4	—2,105	1,083	—0,017	—0,868	—0,039	1,60	1,57
5	0,5	—2,127	1,105	—0,021	—0,856	—0,058	1,81	1,78
6	0,6	—2,149	1,128	—0,025	—0,845	—0,081	2,06	2,03
7	0,7	—2,172	1,151	—0,030	—0,833	—0,109	2,36	2,33
8	0,8	—2,196	1,174	—0,035	—0,822	—0,142	2,72	2,70
9	0,9	—2,220	1,198	—0,040	—0,810	—0,180	3,17	3,15
10	1,0	—2,244	1,222	—0,044	—0,797	—0,222	3,73	3,72

получаем

$$c_2=\frac{1}{m_2-k_2c_1}=\frac{1}{-2{,}060+1{,}040\cdot 0{,}899}=-0{,}889,$$

$$d_2=\varphi_2-k_2c_1d_1=-0{,}008-1{,}040\cdot 0{,}899\cdot 0{,}004=-0{,}012.$$

Вычисления при $i=3,\ 4,\ \ldots,\ 10$ ведутся аналогично. Все результаты записываем в столбцы прямого хода табл. 3.3.

Обратный ход. Определяем y_{10} по формуле (3.18):

$$y_{10}=\frac{0{,}2-0{,}222-0{,}810\cdot 0{,}180}{0{,}4+0{,}810-\frac{1}{0{,}797}}=3{,}73.$$

Записываем полученное значение в последней строке табл. 3.3 при $i=10$. Затем последовательно находим $y_i\,(i=9,\ 8,\ \ldots,\ 1)$ по формулам (3.14):

$$y_9=c_9(d_9-y_{10})=-0{,}810(-0{,}18-3{,}73)=3{,}17,$$
$$y_8=c_8(d_8-y_9)=-0{,}822(-0{,}14-3{,}17)=2{,}72 \text{ и т. д.}$$

И наконец, по формуле (3.19) получаем

$$y_0=\frac{-1{,}13}{-1{,}1}=1{,}03.$$

В последнем столбце табл. 3.3 приводятся для сравнения значения точного решения задачи (3.20), (3.21) $y=x+e^{x^2}$.

Замечание. В § 2 для оценки погрешности метода конечных разностей была приведена формула (2.6). Но она практически малопригодна. Обычно применяют двойной пересчет (см. пример 3.3) и, исходя из принципа Рунге (см. [18]), получают приближенную оценку погрешности значения y_i^*:

$$|y_i^*-y(x_i)|\approx\frac{1}{3}|y_i^*-y_i|,$$

где $y(x_i)$ — значение точного решения краевой задачи в точке $x=x_i$, а y_i, y_i^* — значения приближенных решений в той же точке, полученных с шагами h и $h/2$ соответственно.

Пример 3.3. Методом прогонки найти с точностью до 0,001 решение уравнения

$$y''+2xy'+2y=4x, \tag{3.22}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0)=1,\qquad y(0{,}5)=e^{-0{,}25}+0{,}5=1{,}279. \tag{3.23}$$

Решение. Чтобы найти приближенное решение уравнения (3.22) с заданной точностью, произведем вычисления сначала с шагом $h=0{,}05$, затем с шагом $h=0{,}1$ и сравним полученные результаты.

Имеем для данного уравнения

$$p(x)=2x,\quad q(x)=2,\qquad f(x)=4x. \tag{3.24}$$

По формулам (3.13) составляем таблицу значений m_i, k_i, $\frac{2f_ih^2}{2+hp_i}=\varphi_i$

с шагом $h=0{,}05$. Учитывая, что в данном случае $\alpha_0=1$, $\alpha_1=0$, $\beta_0=1$, $\beta_1=0$, по формулам (3.15) находим c_1, d_1:

$$c_1=\frac{1}{m_1}=-0{,}502, \quad d_1=\varphi_1-k_1=-0{,}994.$$

Применяя последовательно формулы (3.16), заполняем таблицу значений c_i, d_i $(i=2, \ldots, 9)$.

Из краевого условия записываем $y_{10}=y(0{,}5)=1{,}279$ и вычисляем y_i $(i=9, 8, \ldots, 1)$, используя рекуррентную формулу (3.14). Все вычисления записаны в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Метод прогонки для задачи (3.22), (3.23) с шагом $h=0{,}05$

i	x_i	m_i	k_i	$\frac{2f_ih^2}{2+hp_i}=\varphi_i$	Прямой ход		Обратный ход
					c_i	d_i	y_i
1	0,05	—1,990	0,995	0,0005	—0,502	—0,994	1,046
2	0,10	—1,985	0,990	0,0010	—0,672	—0,493	1,088
3	0,15	—1,980	0,985	0,0015	—0,759	—0,325	1,125
4	0,20	—1,975	0,980	0,0020	—0,812	—0,239	1,158
5	0,25	—1,970	0,975	0,0025	—0,848	—0,187	1,187
6	0,30	—1,965	0,970	0,0030	—0,876	—0,151	1,213
7	0,35	—1,967	0,966	0,0035	—0,897	—0,124	1,234
8	0,40	—1,956	0,961	0,0040	—0,914	—0,103	1,253
9	0,45	—1,951	0,956	0,0045	—0,928	—0,087	1,267
10	0,50						1,279

Возьмем теперь шаг $h=0{,}1$, составим таблицу значений m_i, k_i, $\frac{2f_ih^2}{2+hp_i}=\varphi_i$ с новым шагом и вычислим c_i, d_i. Так, например, для значений c_1, d_1 получим

$$c_1=\frac{1}{m_1}=-0{,}510, \quad d_1=\frac{2f_1h^2}{2+hp_1}-k_1=-0{,}976.$$

Таблица 3.5

Метод прогонки для задачи (3.22), (3.23) с шагом $h=0{,}1$

i	x_i	m_i	k_i	$\frac{2f_ih^2}{2+hp_i}=\varphi_i$	Прямой ход		Обратный ход
					c_i	d_i	y_i
1	0,1	—1,960	0,980	0,004	—0,510	—0,976	1,089
2	0,2	—1,941	0,961	0,008	—0,689	—0,470	1,160
3	0,3	—1,992	0,942	0,012	—0,786	—0,293	1,214
4	0,4	—1,904	0,923	0,015	—0,848	—0,197	1,252
5	0,5						1,279

Записываем полученные числа в табл. 3.5 и по формуле (3.14) вычисляем последовательно значения y_i $(i=4, 3, 2, 1)$.

Сравнивая соответствующие значения y_i при $x=0,1$; $0,2$; $0,3$; $0,4$, полученные в табл. 3.4 и 3.5, видим, что их разность не превышает 0,002, а, следовательно, погрешность более точного решения с шагом $h=0,05$ не превышает 0,002/3. Таким образом, значения y_i, найденные с шагом $h=0,05$, удовлетворяют условию задачи и могут быть приняты в качестве решения.

Пример 3.4. Найти решение уравнения

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{3.25}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0)=0, \quad y(0,4)=0,335, \tag{3.26}$$

если функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ заданы табл. 3.6.

Решение. Результаты вычислений с шагом $h=0,1$ помещены в табл. 3.7.

Таблица 3.6

Коэффициенты уравнения (3.25)

x_i	p_i	q_i	f_i
0	—1,20	0,78	0,28
0,1	—1,22	0,75	0,25
0,2	—1,24	0,69	0,20
0,3	—1,26	0,64	0,18
0,4	—1,28	0,60	0,15

Таблица 3.7

Метод прогонки для задачи (3.25), (3.26)

x_i	m_i	k_i	h^2f_i	c_i	d_i	y_i
0	—2,120	1,128	0,0028	—0,472	0,003	0
0,1	—2,122	1,129	0,0025	—0,629	0,004	0,074
0,2	—2,124	1,131	0,0020	—0,768	0,005	0,157
0,3	—2,126	1,132	0,0018			0,254
0,4	—2,128	1,134	0,0015			0,335

Порядок заполнения таблицы.

Прямой ход. Используя данные табл. 3.6, по формулам (3.2) вычисляем m_i, k_i, h^2f_i. Учитывая, что в данной задаче $\alpha_0=1$, $\alpha_1=0$, $A=0$, по формуле (3.4) получаем

$$c_0=\frac{1}{m_0}=-0,472, \qquad d_0=f_0h^2=0,003.$$

Далее, используя формулы (3.5), последовательно находим c_1, c_2, d_1, d_2.

Обратный ход. Из краевых условий имеем $y_0=0$, $y_4=0,335$. Остальные значения y_i $(i=3, 2, 1)$ последовательно находим по формулам (3.3), например:

$$y_3=c_2(d_2-y_4)=0,768(0,005-0,335)=0,254.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти методом прогонки с точностью до 10^{-2} решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие краевым условиям $y(0)=1$, $y(1)=e^{-1}+1=1,367$.

а) $y''+\frac{x}{2}y'+(1+2\pi^2x^2)y=4x$, б) $y''+(x-1)y'+3,125y=4x$,

в) $y''+2xy'+2y=\frac{2(5-2x)}{(2-x)^3}$.

2. Найти методом прогонки приближенные решения следующей краевой задачи:

$$y''+f_j(x)y'+\cos(ax)y=2x^2+2x-4, \qquad y(0)=0,\ y(1)=0,$$
$$a=0,7+0,05\cdot k, \qquad k=0,1,2,3,4,$$

если функции $f_j(x)$ $(j=1, 2, 3, 4, 5)$ заданы табл. 3.8:

Таблица 3.8

Значения функций $f_j(x)$

x_i	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$
0,0	−1,7930	−1,7012	−1,6184	−1,5432	−1,4747
0,2	−1,7863	−1,6877	−1,5994	−1,5200	−1,4480
0,4	−1,7832	−1,6776	−1,5838	−1,5000	−1,4246
0,6	−1,7838	−1,6709	−1,5714	−1,4832	−1,4043
0,8	−1,7878	−1,6673	−1,5630	−1,4692	−1,3869
1,0	−1,7953	−1,6668	−1,5555	−1,4581	−1,3722

3. Методом прогонки найти решения следующих уравнений на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h=0,1$ для краевых условий $y(0)=y(1)=0$.

а) $y''+(a+x^3)y'+(1-x^2)y=e^{1-bx^2}$,

б) $y''+x^2y'+(a-x)y=\frac{x}{x^2+b}$,

в) $y''+y'\sin ax+y=\frac{1}{b+\sin^2 ax}$, г) $y''+\frac{y'}{\sqrt{x^2+b}}+ay=x$.

Параметры a и b принимают значения

$a=1+0,4\cdot k$, $\quad k=0, 1, 2, 3$, $\quad b=2,5+0,5\cdot n$, $\quad n=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

§ 4. Метод конечных разностей для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''=f(x,\ y,\ y') \tag{4.1}$$

при линейных краевых условиях

$$\alpha_0y(a)-\alpha_1y'(a)=A, \quad \beta_0y(b)+\beta_1y'(b)=B. \tag{4.2}$$

Возьмем на отрезке $[a,\ b]$ систему равноотстоящих узлов $x_0=a$, $x_k=x_0+kh$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ с некоторым шагом $h=\frac{b-a}{n}$

и заменим приближенно уравнение (4.1) и краевые условия (4.2) системой

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}=f\left(x_k,\ \ y_k,\ \ \frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}\right)\ (k=1,2,\ldots,n-1),\\ &\alpha_0 y_0-\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}=A,\quad \beta_0 y_n+\beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=B. \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

Получаем нелинейную систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $y_k\,(k=0,\ 1,\ \ldots,n)$. Обозначим

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_0(y)&=\alpha_0 y_0-\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h},\\ \Gamma_n(y)&=\beta_0 y_n+\beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h}. \end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

Решение системы (4.3) находим методом итераций по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_{k+1}^{(r+1)}-2y_k^{(r+1)}+y_{k-1}^{(r+1)}}{h^2}=f\left(x_k,\ y_k^{(r)},\ \frac{y_{k+1}^{(r)}-y_{k-1}^{(r)}}{2h}\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k=1,2,\ldots,n-1),\\ &\Gamma_0\left[y^{(r+1)}\right]=A,\qquad \Gamma_n\left[y^{(r+1)}\right]=B. \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

Здесь индекс r наверху означает номер приближения. На каждом шаге итераций приходится решать систему линейных алгебраических уравнений. Используя специальный вид этой системы, можно дать ее решение в явном виде (см. [2]):

$$y_k^{(r+1)}=\frac{h}{\Delta}\left[A\beta_0(b-a)+A\beta_1+\alpha_1 B\right]+\frac{k}{\Delta}(\alpha_0 B-A\beta_0)+ \\ +h^2\sum_{i=1}^{n-1} g_{ik}f_i^{(r)}, \quad (4.6)$$

где числа a, b, A, B, α_0, α_1, β_0, β_1 известны, а Δ и g_{ik} вычисляются по формулам

$$\Delta=\frac{1}{h}\left[\alpha_0\beta_0(b-a)+\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right], \quad (4.7)$$

$$g_{ik}=\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}\left(i\alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{h}\right)\left(k\beta_0-\beta_0 n-\dfrac{\beta_1}{h}\right) & (i\leqslant k),\\ \dfrac{1}{\Delta}\left(k\alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{h}\right)\left(i\beta_0-\beta_0 n-\dfrac{\beta_1}{h}\right) & (i>k). \end{cases} \quad (4.8)$$

Заметим, что в правой части формулы (4.6) только $f_i^{(r)}$ зависит от номера итерации.

Таким образом, отыскание решения системы (4.3) сводится к достаточно простой итерационной схеме.

Условия сходимости указанного метода рассмотрены в [2].

Пример 4.1. Методом конечных разностей найти с точностью до $0{,}5\cdot 10^{-3}$ решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &y''=2+y^2,\\ &y(0)=y(1)=0. \end{aligned}\right\} \quad (4.9)$$

Решение. Возьмем $n=10$, шаг $h=0{,}1$. Имеем для данной задачи

$$a=0,\ b=1,\ \alpha_0=1,\quad \alpha_1=0,\quad \beta_0=1,\quad \beta_1=0,\ A=B=0,$$
$$f(x,\ y)=2+y^2.$$

Для этих значений из формул (4.6)—(4.8) получаем

$$y_k^{(r+1)}=h^2\sum_{i=1}^{n-1} g_{ik}f_i^{(r)}, \tag{4.10}$$

$$g_{ik}=\begin{cases} 0{,}1\cdot i\,(k-n), & i\leqslant k,\\ 0{,}1\cdot k\,(i-n), & i>k.\end{cases} \tag{4.11}$$

1. Вычисление коэффициентов g_{ik}. Из формулы (4.11) при $i=1$ получаем

$$g_{1k}=0{,}1\,(k-10).$$

Таким образом,

$$g_{11}=-0{,}9;\quad g_{12}=-0{,}8;\ \ldots;\quad g_{19}=-0{,}1.$$

Далее, из формулы (4.11) при $i=2$ будем иметь

$$g_{2k}=\begin{cases} 0{,}2\,(k-10), & 2\leqslant k,\\ 0{,}1\,(-8), & k=1.\end{cases}$$

Отсюда находим

$$g_{21}=-0{,}8;\quad g_{22}=-1{,}6;\quad g_{23}=-1{,}4;\ \ldots;\quad g_{29}=-0{,}2.$$

Вычисления при $i\geqslant 3$ проводятся аналогично. Все результаты записываем в отдельную таблицу (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Значения коэффициентов g_{ik}

k \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	—0,9	—0,8	—0,7	—0,6	—0,5	—0,4	—0,3	—0,2	—0,1
2	—0,8	—1,6	—1,4	—1,2	—1,0	—0,8	—0,6	—0,4	—0,2
3	—0,7	—1,4	—2,1	—1,8	—1,5	—1,2	—0,9	—0,6	—0,3
4	—0,6	—1,2	—1,8	—2,4	—2,0	—1,6	—1,2	—0,8	—0,4
5	—0,5	—1,0	—1,5	—2,0	—2,5	—2,0	—1,5	—1,0	—0,5
6	—0,4	—0,8	—1,2	—1,6	—2,0	—2,4	—1,8	—1,2	—0,6
7	—0,3	—0,6	—0,9	—1,2	—1,5	—1,8	—2,1	—1,4	—0,7
8	—0,2	—0,4	—0,6	—0,8	—1,0	—1,2	—1,4	—1,6	—0,8
9	—0,1	—0,2	—0,3	—0,4	—0,5	—0,6	—0,7	—0,8	—0,9

2. Выбор начального приближения. В качестве начального приближения возьмем функцию $y^{(0)}=x\,(x-1)$, которая является решением уравнения $y''=2$, удовлетворяющим краевым условиям $y\,(0)=y\,(1)=0$. Записываем в табл. 4.2 значения $x_k=0{,}1\cdot k$, соответствующие значения $y_k^{(0)}=x_k\,(x_k-1)$ $(k=1, 2, \ldots, 9)$ и вычисляем $f_k^{(0)}=2+[y_k^{(0)}]^2$.

3. Вычисление первого приближения. Значения $y_k^{(1)}$ находим по формуле (4.10) при $r=0$:

$$y_k^{(1)} = 0{,}01 \sum_{i=1}^{9} g_{ik} f_i^{(0)}.$$

При $k=1$ получаем

$$y_1^{(1)} = 0{,}01 \sum_{i=1}^{9} g_{i1} f_i^{(0)} = -0{,}01\,(0{,}9\cdot 2{,}0081 + 0{,}8\cdot 2{,}0256 + \\ + 0{,}7\cdot 2{,}0441 + 0{,}6\cdot 2{,}0576 + 0{,}5\cdot 2{,}0625 + 0{,}4\cdot 2{,}0576 + \\ + 0{,}3\cdot 2{,}0441 + 0{,}2\cdot 2{,}0256 + 0{,}1\cdot 2{,}0081) = -0{,}0917.$$

Таблица 4.2

Решение задачи (4.9)

r	k	1	2	3	4	5
	x_k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	$x_k(x_k-1)$	−0,09	−0,16	−0,21	−0,29	−0,25
	$f_k^{(0)}$	2,0081	2,0256	2,0441	2,0576	2,0625
1	$y_k^{(1)}$	−0,0917	−0,1632	−0,2146	−0,2455	−0,2558
	$f_k^{(1)}$	2,0085	2,0266	2,0462	2,0602	2,0655
2	$y_k^{(2)}$	−0,0916	−0,1632	−0,2145	−0,2452	−0,2555

r	k	6	7	8	9
	x_k	0,6	0,7	0,8	0,9
0	$x_k(x_k-1)$	−0,24	−0,21	−0,16	−0,09
	$f_k^{(0)}$	2,0576	2,0441	2,0256	2,0081
1	$y_k^{(1)}$	−0,2455	−0,2146	−0,1632	−0,0917
	$f_k^{(1)}$	2,0602	2,0462	2,0266	2,0085
2	$y_k^{(2)}$	−0,2452	−0,2145	−0,1632	−0,0916

Вычисления при $k=2, 3, \ldots, 9$ ведутся аналогично. Результаты записываем в строке $y_k^{(1)}$ табл. 4.2 и находим $f_k^{(1)} = 2 + (y_k^{(1)})^2$.

4. Вычисление второго приближения. Значения $y_k^{(2)}$ находим по формуле (4.10) при $r=1$:

$$y_k^{(2)} = 0{,}01 \sum_{i=1}^{9} g_{ik} f_i^{(1)}.$$

В частности, при $k=1$ получаем

$$y_1^{(2)} = 0{,}01 \sum_{i=1}^{9} g_{i2} f_i^{(2)} = -0{,}01\,(0{,}8\cdot 2{,}0085 + 1{,}6\cdot 2{,}0266 + 1{,}4\cdot 2{,}0462 + \\ + 1{,}2\cdot 2{,}0602 + 1{,}0\cdot 2{,}0655 + 0{,}8\cdot 2{,}0602 + \\ + 0{,}6\cdot 2{,}0462 + 0{,}4\cdot 2{,}0266 + 0{,}2\cdot 2{,}0085) = -0{,}0916.$$

Аналогичным образом находим $y_k^{(2)}$ при $k=2, 3, \ldots, 9$ и записываем в строке $y_k^{(2)}$.

Сравнивая значения $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$, замечаем, что они различаются в последнем знаке. Следовательно, можем записать приближенно $y_k \approx y_k^{(2)}$.

§ 5. Метод Галеркина

Изложенный выше метод конечных разностей позволяет найти приближенное решение краевой задачи в виде таблицы. Укажем теперь некоторые аналитические методы, дающие возможность найти приближенное решение линейной краевой задачи в виде аналитического выражения. Ниже рассмотрены два таких аналитических метода: метод Галеркина и метод коллокации.

Пусть имеем линейную краевую задачу (1.3), (1.4).

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} L[y] &= y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y, \\ \Gamma_a[y] &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a), \\ \Gamma_b[y] &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b). \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана система *базисных функций*

$$u_0(x),\ u_1(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots, \tag{5.2}$$

удовлетворяющая следующим условиям.

1) Система (5.2) является ортогональной, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b u_i(x)\,u_j(x)\,dx = 0 \qquad \text{при } i \neq j, \\ &\int_a^b u_i^2(x)\,dx \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

2) Система (5.2) является полной, т. е. не существует никакой другой отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям $u_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

3) Конечная система базисных функций $\{u_i(x)\}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ выбирается так, чтобы функция $u_0(x)$ удовлетворяла неоднородным краевым условиям

$$\Gamma_a[u_0] = A, \qquad \Gamma_b[u_0] = B, \tag{5.4}$$

а функции $u_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяли бы однородным краевым условиям

$$\Gamma_a[u_i] = \Gamma_b[u_i] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.5}$$

Решение краевой задачи (1.3), (1.4) будем искать в виде

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x). \tag{5.6}$$

Из условий (5.4), (5.5) следует, что эта функция удовлетворяет краевым условиям (1.4).

Рассмотрим выражение, называемое *невязкой*:

$$R(x,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n) = L[u_0] + \sum_{i=1}^{n} c_i L[u_i] - f(x). \tag{5.7}$$

Выберем коэффициенты c_i таким образом, чтобы значение интеграла от квадрата невязки

$$\int_a^b R^2(x,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)\,dx \tag{5.8}$$

было наименьшим.

Доказано (см. [2], [13], [18]), что это достигается лишь в том случае, если невязка $R(x,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)$ ортогональна ко всем базисным функциям u_i.

Записываем условие ортогональности:

$$\int_a^b u_k(x) R(x,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)\,dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

или, в более подробной записи,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b u_k(x) L[u_i]\,dx = \int_a^b u_k(x)\{f(x) - L[u_0]\}\,dx. \tag{5.9}$$

Мы получили систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_i.

Заметим, что при выборе базисных функций условие ортогональности (5.3) не является обязательным, если подобрать коэффициенты из условия минимальности интеграла (5.8). Так, например, взяв за основу полную систему функций, ортогональных на отрезке $[a,\ b]$, можно выбрать в качестве базисных функций линейные комбинации функций из этой системы. Достаточно лишь, чтобы выбранные функции были линейно независимы на отрезке $[a,\ b]$.

Пример 5.1. Методом Галеркина найти приближенное решение уравнения

$$y'' - y' \cos x + y \sin x = \sin x, \tag{5.10}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(-\pi) = y(\pi) = 2. \tag{5.11}$$

Решение. Выберем в качестве системы базисных функций $u_i(x)$ $(i=0, 1, 2, 3, 4)$ следующие тригонометрические функции:

$$u_0=2,\quad u_1=\sin x,\quad u_2=\cos x+1,\quad u_3=\sin 2x,\quad u_4=\cos 2x-1. \tag{5.12}$$

Эти функции линейно независимы на отрезке $[-\pi, \pi]$, причем функция u_0 удовлетворяет краевому условию (5.11), а остальные функции — нулевым краевым условиям. Будем искать решение в виде

$$y=u_0(x)+\sum_{i=1}^{4} c_i u_i(x).$$

Находим $L[u_i]$ $(i=0, 1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{aligned}
&L[u_0]=2\sin x,\\
&L[u_1]=-\sin x-\cos 2x,\\
&L[u_2]=\sin x-\cos x+\sin 2x,\\
&L[u_3]=-\frac{1}{2}\cos x-4\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 3x,\\
&L[u_4]=-\frac{1}{2}\sin x-4\cos 2x+\frac{3}{2}\cos 3x,\\
&f(x)-L[u_0]=-\sin x.
\end{aligned}$$

Вычисляем коэффициенты системы (5.9), пользуясь следующими обозначениями:

$$a_{ik}=\int_a^b u_k(x)\,L[u_i]\,dx,\qquad b_k=\int_a^b u_k(x)\,\{f(x)-L[u_0]\}\,dx,$$

и учитывая при этом ортогональность системы тригонометрических функций $(1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots)$

$$b_1=-\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx=-\pi,\quad b_2=b_3=b_4=0,$$

$$a_{11}=-\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx=-\pi,\quad a_{12}=\pi,\quad a_{13}=0,\quad a_{14}=-\frac{\pi}{2},$$

$$a_{21}=0,\quad a_{22}=-\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx=-\pi,\quad a_{23}=-\frac{\pi}{2},\quad a_{24}=0,$$

$$a_{31}=0,\quad a_{32}=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 2x\,dx=\pi,\quad a_{33}=-4\pi,\quad a_{34}=0,$$

$$a_{41}=-\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 2x\,dx=-\pi,\quad a_{42}=0,\quad a_{43}=0,\quad a_{44}=-4\pi.$$

Производя соответствующие сокращения, приходим к системе

$$\begin{aligned}
c_1-c_2\qquad\quad &+0{,}5c_4=1,\\
c_2+05c_3\quad &\qquad\;\;=0,\\
c_2-4c_3\quad &\qquad\;\;=0,\\
c_1\qquad\qquad\quad &+4c_4\;\;=0,
\end{aligned}$$

из которой получаем $c_1 = 8/7$, $c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = -2/7$. Таким образом имеем

$$y \approx 2 + \frac{8}{7} \sin x + \frac{4}{7} \sin^2 x.$$

В табл. 5.1 приведены для сравнения значения полученного приближенного решения и точного решения $y = e^{\sin x} + 1$.

Пример 5.2. Методом Галеркина найти приближенное решение уравнения

$$y'' + y + x = 0, \tag{5.13}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{5.14}$$

Решение. В качестве системы базисных функций u_i выберем следующие функции:

$$u_0(x) \equiv 0, \quad u_1(x) = x(1 - x),$$
$$u_2(x) = x^2(1 - x).$$

Они линейно независимы и удовлетворяют нулевым краевым условиям. Приближенное решение задачи ищем в виде

$$y = c_1 x(1 - x) + c_2 x^2 (1 - x) = $$
$$= x(1 - x)(c_1 + c_2 x).$$

Подставляя y в левую часть уравнения (5.13), получаем невязку

Таблица 5.1

Приближенное и точное решения задачи (5.10), (5.11)

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y_i	1,429	2	3,714
y	1,368	2	3,718

$$R(x, c_1, c_2) = -2c_1 + c_2(2 - 6x) + x(1 - x)(c_1 + c_2 x) + x.$$

Учитывая ортогональность функции R к функциям $u_1(x)$ и $u_2(x)$, получаем систему

$$\int_0^1 (x - x^2) R(x, c_1, c_2)\, dx = 0,$$

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) R(x, c_1, c_2)\, dx = 0.$$

Подставив в эту систему значение R и вычислив интегралы, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов c_1 и c_2:

$$\frac{3}{10} c_1 + \frac{3}{20} c_2 = \frac{1}{12},$$

$$\frac{3}{20} c_1 + \frac{13}{105} c_2 = \frac{1}{20}.$$

Решая эту систему, получим

$$c_1 = \frac{71}{369}, \quad c_2 = \frac{7}{41}.$$

Таким образом,

$$y(x)=x(1-x)\left(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x\right).$$

В табл. 5.2 приведены для сравнения значения полученного приближенного решения и точного решения

$$y=\frac{\sin x}{\sin 1}-x.$$

Таблица 5.2

Приближенное и точное решения задачи (5.13), (5.14)

x_i	0,25	0,50	0,75
y_i	0,044	0,069	0,060
y	0,044	0,070	0,060

Замечание. Рассмотренные примеры показывают, что при соответствующем выборе базисных функций оказывается возможным найти приближенное решение краевой задачи в аналитической форме.

Если функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ в уравнении (1.3) являются достаточно сложными, то вычисление коэффициентов системы (5.9) становится слишком громоздким. В таких случаях рекомендуется применять либо разностный метод, либо метод коллокации, который рассматривается в следующем параграфе.

ЗАДАЧИ

Методом Галеркина найти приближенные решения следующих краевых задач.

1. $y''-y'\cos x+y\sin x=f(x),\quad y(-\pi)=y(\pi)=2.$

а) $f(x)=\cos x$, б) $f(x)=\sin x$, в) $f(x)=\cos 2x$.

2. $y''-2xy'+2y=f(x),\quad y(0)=0,\quad y'(1)=1.$

а) $f(x)=x$, б) $f(x)=3x^2+x-1$, в) $f(x)=5x^3-3x+x$, г) $f(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x^2-\frac{1}{2}x+1\right)$.

§ 6. Метод коллокации

Решение краевой задачи (1.3), (1.4) ищем в виде

$$y(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{n}c_iu_i(x), \tag{6.1}$$

где $u_i(x)\,(i=0, 1, \ldots, n)$ — линейно независимые функции, удовлетворяющие условиям (5.4), (5.5). Потребуем, чтобы невязка

$$R(x,\ c_1, c_2, \ldots, c_n)=L[y]-f(x)=L[u_0]-f(x)+\sum_{i=1}^{n}c_iL[u_i] \tag{6.2}$$

обращалась в нуль на некоторой системе точек x_1, x_2, ..., x_n отрезка $[a, b]$, называемых *точками коллокации*, причем число таких точек должно равняться числу коэффициентов c_i в выражении (6.1). Тогда для определения c_1, c_2, ..., c_n получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} R(x_1, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0, \\ R(x_2, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ R(x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0. \end{array}\right\} \tag{6.3}$$

Метод коллокации можно применять и для приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений

$$y'' = f(x, y, y') \tag{6.4}$$

с линейными краевыми условиями (1.4). В этом случае невязка имеет вид

$$R(x) = y'' - f(x, y, y'), \tag{6.5}$$

а система (6.3) уже будет системой нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (см. пример 6.2).

Пример 6.1. Методом коллокации найти приближенное решение уравнения

$$y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0 \tag{6.6}$$

с краевыми условиями

$$y(-1) = y(1) = 0. \tag{6.7}$$

Решение. Из вида уравнения (6.6) и краевых условий (6.7) можно сделать вывод о четности решения задачи. Поэтому выберем в качестве базисных функций многочлены $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = 1 - x^2$, $u_2(x) = x^2(1 - x^2)$. Легко заметить, что условия (6.7) для них выполняются.

Решение задачи (6.6), (6.7) будем искать в виде

$$y = c_1(1 - x^2) + c_2 x^2 (1 - x^2).$$

За точки коллокации возьмем

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{2}.$$

Составляем невязку $R(x)$:

$$R(x) = -2c_1 + c_2(2 - 12x^2) + (1 + x^2)\left[c_1(1 - x^2) + c_2(x^2 - x^4)\right] + 1 = \\ = 1 - c_1(1 + x^4) + c_2(2 - 11x^2 - x^6).$$

Подставляя значения $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, получаем систему

$$1 - c_1 + 2c_2 = 0, \qquad 1 - \frac{17}{16}c_1 - \frac{49}{64}c_2 = 0,$$

решая которую находим $c_1 = 0{,}957$, $c_2 = -0{,}022$. Следовательно, имеем приближенное решение

$$y \approx 0{,}957(1 - x^2) - 0{,}022x^2(1 - x^2).$$

Пример 6.2. Методом коллокации найти приближенное решение уравнения

$$y'' = 2x + y^2 \tag{6.8}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Решение. Возьмем в качестве базисных следующие функции:

$$u_0 \equiv 0, \qquad u_1 = x(1 - x), \qquad u_2 = x^2(1 - x)$$

и будем искать решение в виде $y=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$. Составляем невязку $R(x)$:

$$R(x)=c_1u_1''+c_2u_2''-(c_1^2u_1^2+2c_1c_2u_1u_2+c_2^2u_2^2)-2x,$$

где $u_1''=-2$, $u_2''=2-6x$.

Выберем точки коллокации: $x_1=0{,}25$, $x_2=0{,}75$.

Вычисляя $R(x)$ в точках коллокации, получаем систему нелинейных уравнений

$$\left.\begin{aligned}-2c_1+0{,}5c_2&=0{,}5+(0{,}0352c_1^2+0{,}0176c_1c_2+0{,}0022c_2^2),\\ -2c_1-2{,}5c_2&=1{,}5+(0{,}0352c_1^2+0{,}0528c_1c_2+0{,}0198c_2^2).\end{aligned}\right\}\quad(6.9)$$

Запишем эту систему следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}c_1&=-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}(0{,}0211c_1^2+0{,}0141c_1c_2+0{,}0031c_2^2),\\ c_2&=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(0{,}0352c_1c_2+0{,}0176c_2^2)\end{aligned}\right\}\quad(6.10)$$

и решим ее методом итераций по формулам

$$c_{1,\,k+1}=-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}(0{,}0211c_{1,\,k}^2+0{,}0141c_{1,\,k}c_{2,\,k}+0{,}0031c_{2,\,k}^2),$$

$$c_{2,\,k+1}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(0{,}0352c_{1,\,k}c_{2,\,k}+0{,}0176c_{2,\,k}^2).$$

Здесь индекс k означает номер приближения.

Первое приближение:

$$c_{1,1}=-\frac{1}{3},\qquad c_{2,\,1}=-\frac{1}{3},$$

$$c_{1,\,1}^2=c_{2,\,1}^2=c_{1,\,1}c_{2,\,1}=\frac{1}{9}.$$

Второе приближение:

$$c_{1,2}=-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{9}(0{,}0211+0{,}0141+0{,}0031)=-0{,}3369,$$

$$c_{2,2}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}(0{,}0352+0{,}0176)=-0{,}3353,$$

$$c_{1,2}^2=0{,}1135,\quad c_{2,\,2}^2=0{,}1124,\quad c_{1,\,2}c_{2,\,2}=0{,}1130.$$

Третье приближение:

$$c_{1,3}=-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}(0{,}0211\cdot0{,}1135+0{,}0141\cdot0{,}1130+0{,}0031\cdot0{,}1124)=$$
$$=-0{,}3369,$$

$$c_{2,3}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(0{,}0352\cdot0{,}1130+0{,}0176\cdot0{,}1124)=-0{,}3353.$$

Так как значения c_1, c_2 во втором и третьем приближениях совпадают, то с точностью до 10^{-4} можно записать

$$c_1=-0{,}3369,\quad c_2=-0{,}3353.$$

Таким образом, имеем приближенное решение уравнения (6.8)

$$y = -x(1-x)(0{,}3369 + 0{,}3353x).$$

Замечание. Из рассмотренных выше примеров видно, что метод коллокации приводит к более простым вычислениям по сравнению с методом Галеркина.

ЗАДАЧИ

Методом коллокации найти приближенные решения следующих краевых задач.

1. $y'' + x^2y' - xy = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$

а) $f(x) = e^x$, б) $f(x) = e^{x^2}$, в) $f(x) = \sin x$, г) $f(x) = \cos x$, д) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

2. $y'' + y' - \frac{y}{x} = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$

а) $f(x) = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$, б) $f(x) = 8x^2 - 8x + \frac{3}{2}$,

в) $f(x) = 4x^2 - x + \frac{3}{2}$.

ГЛАВА X

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Метод сеток

Метод сеток, или *метод конечных разностей*, является одним из самых распространенных в настоящее время методов численного решения уравнений с частными производными. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными отношениями. Мы ограничимся случаем двух независимых переменных. Пусть в плоскости xOy имеется некоторая область G с границей Γ (рис. 4). Построим на плоскости два семейства параллельных прямых:

$$x = x_0 + ih$$
$$(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$y = y_0 + kl$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

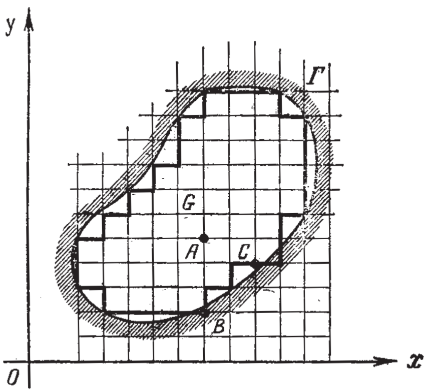

Рис. 4.

Точки пересечения этих прямых назовем *узлами*. Два узла называются *соседними*, если они удалены друг от друга в направлении оси Ox или Oy на расстояние, равное шагу сетки h или l соответственно. Выделим узлы, принадлежащие области $G+\Gamma$, а также некоторые узлы, не принадлежащие этой области, но расположенные на расстоянии, меньшем чем шаг, от границы Γ. Те узлы, у которых все четыре соседних узла принадлежат выделенному множеству узлов, называются *внутренними* (узел A, рис. 4). Оставшиеся из выделенных узлов называются *граничными* (узлы B, C, рис. 4).

Значения искомой функции $u = u(x, y)$ в узлах сетки будем обозначать через $u_{ik} = u(x_0 + ih, \; y_0 + kl)$. В каждом внутреннем узле $(x_0 + ih, \; y_0 + kl)$ заменим частные производные разностными отношениями:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,\,k} - u_{i-1,\,k}}{2h}, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,\,k+1} - u_{i,\,k-1}}{2l}; \qquad (1.1)$$

в граничных точках мы вынуждены пользоваться менее точными формулами вида

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,\,k}-u_{ik}}{h}, \qquad (1.2)$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,\,k+1}-u_{ik}}{l}.$$

Аналогично заменяются частные производные второго порядка, например:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik} &\approx \frac{u_{i+1,\,k}-2u_{ik}+u_{i-1,\,k}}{h^2},\\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik} &\approx \frac{u_{i,\,k+1}-2u_{ik}+u_{i,\,k-1}}{l^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

Указанные замены производных в каждом узле сетки позволяют свести решение уравнений с частными производными к решению системы разностных уравнений.

§ 2. Метод сеток для задачи Дирихле

Первая краевая задача, или задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,\ y), \qquad (2.1)$$

ставится следующим образом: найти функцию $u = u(x,\ y)$, удовлетворяющую внутри некоторой области G уравнению (2.1), а на границе Γ — условию

$$u\,|_{\Gamma} = \varphi(x,\ y), \qquad (2.2)$$

где $\varphi(x,\ y)$ — заданная непрерывная функция.

Выбрав шаги h и l по x и y соответственно, строим сетку

$$x_i = x_0 + ih \qquad (i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$
$$y_k = y_0 + kl \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

и заменяем в каждом внутреннем узле $(x_i,\ y_k)$ производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ конечно-разностными отношениями (1.3), а уравнение (2.1) — конечно-разностными уравнениями

$$\frac{u_{i+1,\,k}-2u_{ik}+u_{i-1,\,k}}{h^2} + \frac{u_{i,\,k+1}-2u_{ik}+u_{i,\,k-1}}{l^2} = f_{ik}, \qquad (2.3)$$

где $f_{ik} = f(x_i,\ y_k)$.

Уравнения (2.3) вместе со значениями u_{ik} в граничных узлах образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $u(x,\ y)$ в узлах $(x_i,\ y_k)$. Наиболее простой вид эта система имеет для прямоугольной области и для $l = h$. В этом случае уравнения (2.3) записываются следующим образом:

$$u_{i+1,\,k} + u_{i-1,\,k} + u_{i,\,k+1} + u_{i,\,k-1} - 4u_{ik} = h^2 f_{ik}, \qquad (2.4)$$

а значения в граничных узлах в точности равны значениям граничной функции. При $f(x, y) \equiv 0$ уравнение (2.1) называется *уравнением Лапласа* и соответствующие конечно-разностные уравнения имеют вид

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i+1,\,k} + u_{i-1,\,k} + u_{i,\,k+1} + u_{i,\,k-1}). \qquad (2.5)$$

При составлении уравнений (2.4) и (2.5) была использована схема узлов, изображенная на рис. 5. Здесь и в дальнейшем на рисунках указаны только индексы узла, например, узел, (x_i, y_k) обозначается через (i, k). Иногда бывает удобнее использовать схему узлов,

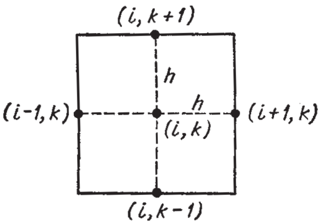

Рис. 5.

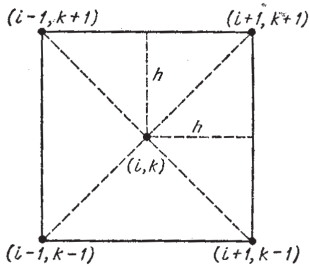

Рис. 6.

показанную на рис. 6. В этом случае уравнению Лапласа соответствуют следующие конечно-разностные уравнения:

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i-1,\,k-1} + u_{i+1,\,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,\,k+1}), \qquad (2.6)$$

а для уравнения Пуассона будем иметь

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i-1,\,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,\,k+1} + u_{i+1,\,k+1}) + \frac{h^2}{2} f_{ik}.$$

Погрешность замены дифференциального уравнения разностным, т. е. остаточный член R_{ik} для уравнения Лапласа, оценивается неравенством

$$|R_{ik}| \leqslant \frac{h^2}{6} M_4,$$

где

$$M_4 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}.$$

Погрешность приближенного решения, полученного разностным методом, складывается из трех погрешностей:

1) погрешности замены дифференциального уравнения разностным;

2) погрешности аппроксимации краевых условий;

3) погрешности, получаемой в результате того, что система разностных уравнений решается приближенным методом.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу о стационарном распределении тепла в плоской квадратной изолированной пластинке со стороной 1, если на границе пластинки поддерживается постоянная температура.

Известно (см. [52]), что функция $u(x, y)$, дающая распределение температуры, является решением уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

при соответствующих краевых условиях. Для данной задачи краевые условия приведены на рис. 7.

Решение. Строим сетку с шагом $h=1/4$. Получим девять внутренних узлов (рис. 7). Записываем в этих узлах конечно-разностные уравнения.

В силу симметрии граничных условий имеем

$$u_{11}=u_{31}, \qquad u_{12}=u_{32}, \qquad u_{13}=u_{33}. \tag{2.7}$$

Это сокращает число неизвестных значений функции u во внутренних узлах до шести. Таким образом, в узлах (3, 1), (3, 2), (3, 3)

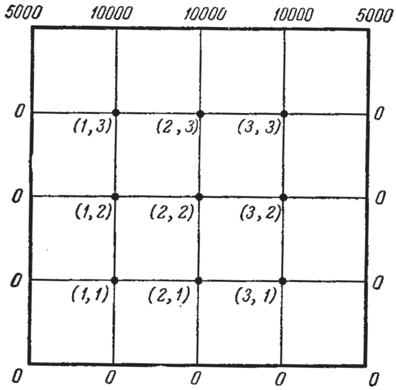

Рис. 7.

конечно-разностные уравнения писать не нужно. В остальных шести внутренних узлах (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3) получаем соответственно шесть уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&u_{01}+u_{21}+u_{10}+u_{12}-4u_{11}=0, \quad u_{11}+u_{31}+u_{20}+u_{22}-4u_{21}=0,\\
&u_{02}+u_{22}+u_{11}+u_{13}-4u_{12}=0, \quad u_{12}+u_{32}+u_{21}+u_{23}-4u_{22}=0,\\
&u_{03}+u_{23}+u_{12}+u_{14}-4u_{13}=0, \quad u_{13}+u_{33}+u_{22}+u_{24}-4u_{23}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

В эти уравнения входят еще 12 значений функции в граничных точках. Эти значения мы берем из краевых условий

$$\left.\begin{aligned}
&u_{i0}=0 \ (i=1, 2, 3), \quad u_{0j}=0 \ (j=1, 2, 3),\\
&u_{14}=u_{24}=u_{34}=10\,000.
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Заметим, что в остальных узлах краевые условия не используются.

Окончательно, учитывая условия (2.7), (2.9), получаем систему

$$u_{21}+u_{12}-4u_{11}=0,\quad 2u_{11}+u_{22}-4u_{21}=0,$$
$$u_{22}+u_{11}+u_{13}-4u_{12}=0,\quad 2u_{12}+u_{21}+u_{23}-4u_{22}=0,$$
$$u_{23}+u_{12}-4u_{13}=-10\,000,\quad 2u_{13}+u_{22}-4u_{23}=-10\,000.$$

Решив эту систему методом Гаусса, получим

$$u_{11}=714,\quad u_{21}=982,\quad u_{12}=1875,\quad u_{22}=2500,$$
$$u_{13}=4286,\quad u_{23}=5268.$$

Пример 2.2. Как известно (см. [42]), задача об упругой деформации квадратной пластины под действием постоянной силы сводится к решению уравнения Пуассона

$$\Delta u=-1$$

с нулевыми краевыми значениями. Найти решение этой задачи методом сеток, приняв сторону квадрата равной 1 и шаг h равным 1/4.

Решение. Заметим, что в данном случае имеет место полная симметрия значений искомой функции, так как все краевые условия нулевые, а функция $f(x,\ y)$ постоянна. Поэтому конечно-разностные уравнения достаточно составить для четверти квадрата, т. е. для узлов (1, 1), (2, 1), (1, 2) и (2, 2) (см. рис. 7). С учетом нулевых краевых условий получаем следующие уравнения:

$$u_{21}+u_{12}-4u_{11}=-0{,}0625,\quad 2u_{11}+u_{22}-4u_{21}=-0{,}0625,$$
$$u_{22}+2u_{11}-4u_{12}=-0{,}0625,\quad 2u_{12}+2u_{21}-4u_{22}=-0{,}0625.$$

В силу симметрии решения ($u_{12}=u_{21}$) полученная система сводится к системе трех уравнений

$$\begin{aligned}-4u_{11}+2u_{12}\qquad &=-0{,}0625,\\ 2u_{11}-4u_{12}+u_{22}&=-0{,}0625,\\ 4u_{12}-4u_{22}&=-0{,}0625.\end{aligned}$$

Решив эту систему получаем

$$u_{11}=0{,}0429,\quad u_{12}=u_{21}=0{,}0547,\quad u_{22}=0{,}0703.$$

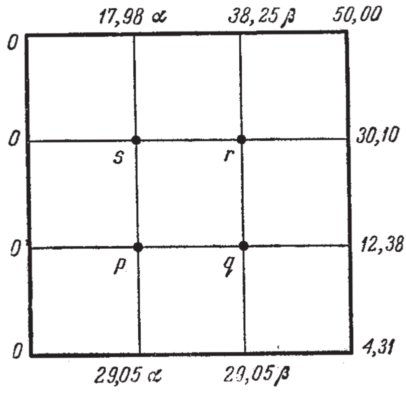

Рис. 8.

ЗАДАЧИ

1. Применяя метод сеток, найти решение уравнения Лапласа в точках p, q, r, s квадрата при краевых условиях, указанных на рис. 8, для $\alpha=0{,}9+0{,}1\cdot k$, $k=0,\ 1,\ 2$, $\beta=1{,}01+0{,}01\cdot n$, $n=0,\ 1, 2, 3, 4$.

2. Применяя метод сеток с шагом $h=1/4$, найти решение уравнения Лапласа в квадрате с вершинами A (0, 0), B (0, 1), C (1, 1), D (1, 0). Краевые условия приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Краевые условия

Варианты	$u\mid_{AB}$	$u\mid_{BC}$	$u\mid_{CD}$	$u\mid_{AD}$
а)	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
б)	$30y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	0
в)	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
г)	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
д)	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
е)	$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
ж)	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
з)	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
и)	$40y^2$	40	40	$40\sin\frac{\pi x}{2}$
к)	$50y$	$50(1-x)$	0	$60x,\ 0\leqslant x<1/2$ $60(1-x),\ 1/2\leqslant x\leqslant 1$

§ 3. Итерационный метод решения системы конечно-разностных уравнений

Непосредственное решение системы конечно-разностных уравнений методами последовательного исключения при большом числе узлов оказывается слишком громоздким. Здесь более удобны итерационные методы решения, которые учитывают специальный вид таких систем и оказываются удобными для реализации на ЭВМ (см. [5], [60]).

Мы рассмотрим один из наиболее простых методов — *процесс усреднения Либмана* для систем (2.5) (см. [13], [35], [39]) *).

Согласно методу Либмана вычисления ведутся так: выбрав начальные приближения $u_{ij}^{(0)}$, последовательные приближения $u_{ij}^{(k+1)}$ для внутренних узлов сеточной области определяем по формуле

$$u_{ij}^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left[u_{i+1,\,j}^{(k)}+u_{i-1,\,j}^{(k)}+u_{i,\,j+1}^{(k)}+u_{i,\,j-1}^{(k)}\right]\quad(k=0,\,1,\,2,\,\ldots).\quad(3.1)$$

Для получения начальных приближений можно указать два способа:

1) значения $u_{ij}^{(0)}$ во внутренних узлах получают путем интерполяции, использующей известные граничные значения (см. пример 3.1);

2) составляют систему конечно-разностных уравнений для сетки с более крупным шагом и решают ее методом исключения, а затем

*) Описание других эффективных методов и подробную библиографию см. в [43].

полученные значения интерполируют на узлы данной сетки (см. пример 3.2).

Доказано (см. [18], [37], [52]), что для любого шага h процесс Либмана сходится к точному решению независимо от выбора начальных значений, т. е. существует предел

$$\lim_{k \to \infty} u_{ij}^{(k)} = u_{ij}.$$

Итерационный процесс будет сходиться значительно быстрее, если при вычислении последующих средних арифметических использовать

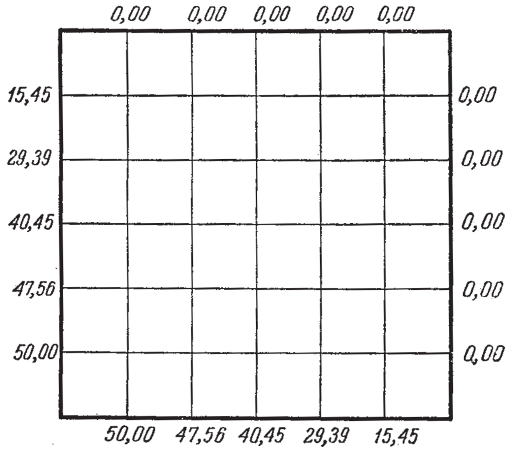

Рис. 9.

не только значения предыдущего приближения, но и вновь найденные значения (метод Зейделя, пример 3.2). Обычно итерации продолжают до тех пор, пока в двух последовательных приближениях не совпадет требуемое количество десятичных знаков. Для оценки погрешности приближенного решения уравнения Лапласа можно использовать принцип Рунге (см. [2], [35]), согласно которому погрешность ε_h приближенного решения u_h, полученного с шагом h, дается приближенной формулой

$$\varepsilon_h \approx \frac{u_h - u_{2h}}{3}, \tag{3.2}$$

где u_{2h} — приближенное решение, полученное с шагом $2h$. Отметим, что указанный метод итераций приводит к выполнению стандартной операции усреднения в каждом внутреннем узле, поэтому он оказывается очень удобным для программирования на ЭВМ. При вычислениях на клавишных электрических машинах полезно приготовить достаточное количество *вычислительных шаблонов* (см. [13], [35]).

Пример 3.1. Найти решение уравнения Лапласа для квадрата при краевых условиях, указанных на рис. 9.

Решение. На рис. 10 показан вычислительный шаблон для данной задачи. Строится он следующим образом. Каждый узел заменяется квадратом. В квадратах, соответствующих граничным узлам, записываются данные краевые значения. Так как в процессе итераций граничные значения не меняются, остальные шаблоны даются в виде квадратов 5×5 (табл. 3.1), которые прикладываются к основному шаблону (рис. 10).

	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
15,45						0,00
29,39						0,00
40,45						0,00
47,56						0,00
50,00						0,00
	50,00	47,56	40,45	29,39	15,45	

Рис. 10.

Порядок заполнения шаблонов.

1. Вычисление начального приближения. Интерполируем граничные значения на внутренние узлы следующим образом. Начнем с верхней строки. Будем считать, что функция $u(x, y)$ убывает линейно от значения 15,45 до 0. Это означает, что в качестве начального значения $u_{i5}^{(0)}$ возьмем

$$u_{i5}^{(0)}=\frac{15,45}{6}(6-i)$$

$$(i=1, 2, 3, 4, 5),$$

т. е. $u_{15}^{(0)}=12,88$, $u_{25}^{(0)}=10,30$, $u_{35}^{(0)}=7,72$, $u_{45}^{(0)}=5,15$, $u_{55}^{(0)}=2,58$. Аналогично поступим в правом столбце, принимая $u_{5j}^{(0)}=u_{i5}^{(0)}$.

Затем рассмотрим вторую (сверху) строку. Будем считать, что функция $u(x, y)$ убывает линейно от 29,39 до 5,15. Рассуждая таким же образом, как в предыдущем случае, получаем значения $u_{i4}^{(0)}$ $(i=2, 3, 4, 5)$, а следовательно, и u_{4j}^{0} $(j=1, 2, 3, 4)$. Этот процесс продолжаем до заполнения всей таблицы начального приближения (табл. 3.1, шаблон 1).

2. Вычисление последовательных приближений по формуле (3.1). Берем шаблон 1, прикладываем его к основному шаблону (рис. 10) и по формуле (3.1) при $k=1$ последовательно вычисляем

$$u_{15}^{(1)}=\frac{1}{4}\left(u_{25}^{(0)}+u_{05}^{(0)}+u_{16}^{(0)}+u_{14}^{(0)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(10,30+15,45+0+24,54)=12,57,$$

$$u_{14}^{(1)}=\frac{1}{4}\left(u_{24}^{(0)}+u_{04}^{(0)}+u_{15}^{(0)}+u_{13}^{(0)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(19,69+29,39+34,05+12,88)=24,00$$

и т. д.

Таблица 3.1

Результаты итераций для примера 3.1

Шаблон 1

12,88	10,30	7,72	5,15	2,58
24,54	19,69	14,85	10,00	5,15
34,05	27,65	21,25	14,85	7,72
40,92	34,29	27,65	19,69	10,30
45,46	40,92	34,05	24,54	12,88

Шаблон 2

12,57	10,07	7,58	5,08	2,58
24,00	19,34	14,66	10,00	
33,39	27,32	21,25		
40,34	34,28			
45,46				

Шаблон 3

12,38	9,87	7,45	5,04	2,54
23,67	19,01	14,54	9,87	
33,03	27,06	20,99		
40,17	33,83			
45,17				

Шаблон 4

12,25	9,71	7,36	4,96	2,52
23,45	18,78	14,33	9,79	
32,84	26,72	20,80		
39,90	33,62			
45,08				

Шаблон 5

12,15	9,60	7,25	4,92	2,48
23,32	18,55	14,18	9,64	
32,63	26,51	20,52		
39,78	33,31			
44,95				

Шаблон 6

12,09	9,49	7,18	4,84	2,46
23,18	18,40	13,99	9,55	
32,52	26,25	20,34		
39,61	33,14			
44,89				

Шаблон 7

12,03	9,42	7,08	4,80	2,42
23,10	18,23	13,87	9,42	
32,37	26,10	20,12		
39,53	32,93			
44,80				

Шаблон 8

11,99	9,34	7,02	4,73	2,40
23,00	18,12	13,71	9,34	
32,30	25,91	19,98		
39,42	32,82			
44,76				

Шаблон 9

11,95	9,28	6,94	4,69	2,36
22,95	17,99	13,62	9,22	
32,20	25,80	19,81		
39,36	32,66			
44,71				

Шаблон 10

11,92	9,22	6,90	4,63	2,34
22,88	17,91	13,49	9,16	
32,14	25,66	19,71		
39,28	32,58			
44,68				

Шаблон 11

11,89	9,18	6,84	4,60	2,32
22,84	17,81	13,42	9,06	
32,07	25,58	19,58		
39,24	32,47			
44,64				

Шаблон 12

11,87	9,14	6,80	4,56	2,30
22,79	17,76	13,32	9,01	
32,03	25,48	19,50		
39,18	32,41			
44,62				

Шаблон 13

11,84	9,11	6,76	4,53	2,28
22,76	17,68	13,27	8,94	
31,98	25,42	19,40		
39,16	32,33			
44,59				

Шаблон 14

11,83	9,07	6,73	4,50	2,26
22,72	17,64	13,20	8,90	
31,95	25,35	19,34		
39,12	32,29			
44,58				

Шаблон 15

11,81	9,05	6,69	4,47	2,25
22,70	17,58	13,15	8,85	
31,91	25,30	19,28		
39,10	32,24			
44,56				

Шаблон 16

11,80	9,02	6,67	4,45	2,24
22,67	17,55	13,10	8,81	
31,89	25,25	19,22		
39,07	32,20			
44,55				

Шаблон 17

11,78	9,00	6,64	4,43	2,22
22,66	17,51	13,06	8,78	
32,86	25,22	19,18		
39,05	32,16			
44,54				

Все результаты записываем в шаблон 2 и аналогичным образом находим следующее приближение $u_{ij}^{(2)}$. Вычисления ведем до тех пор, пока значения двух последовательных итераций будут отличаться не более чем на 0,05. Результаты 16-й и 17-й итераций этому условию удовлетворяют. Шаблоны, соответствующие последовательным итерациям, приведены в табл. 3.1. Ввиду симметрии таблицы шаблоны заполнены наполовину.

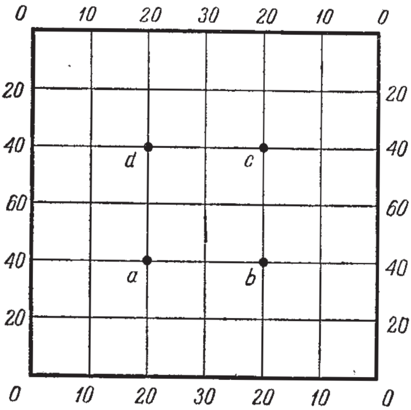

Рис. 11.

Пример 3.2. Найти решение уравнения Лапласа для квадрата при краевых условиях, указанных на рис. 11, взяв шаг $h = 1/6$.

Решение.

1. Вычисление начального приближения. Для вычисления начального приближения сначала построим сетку с шагом $h = 1/3$, обозначив значения искомой функции в узлах сетки через a, b, c, d (рис. 11). Заметим при этом, что из

6	0	10	20	30	20	10	0
5	20	22,5	24,4	25	24,4	22,5	20
4	40	35	30	30	30	35	40
3	60	40	35	30	35	40	60
2	40	35	30	30	30	35	40
1	20	22,5	24,4	25	24,4	22,5	20
0	0	10	20	30	20	10	0
j / i	0	1	2	3	4	5	6

Рис. 12.

симметрии краевых условий следует

$$a = b = c = d. \tag{3.3}$$

Поэтому достаточно составить только одно уравнение

$$40 + b + 20 + d - 4a = 0.$$

Используя условие (3.3), получаем

$$a = 30.$$

Затем приступаем к вычислению начального приближения с шагом $h = 1/6$. Для этого построим шаблон (рис. 12), в котором запишем краевые условия и полученные значения в четырех узлах

$$u_{22}^{(0)} = u_{42}^{(0)} = u_{24}^{(0)} = u_{44}^{(0)} = 30.$$

Используя эти величины, находим значения $u_{ij}^{(0)}$ в остальных узлах сетки. Разберем подробно вычисление $u_{i1}^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Значения $u_{11}^{(0)}$, $u_{31}^{(0)}$ получаем по формуле (2.6):

$$u_{11}^{(0)} = \frac{1}{4}(u_{00} + u_{20} + u_{02} + u_{22}^{(0)}) = \frac{1}{4}(0 + 20 + 40 + 30) = 22{,}5,$$

$$u_{31}^{(0)} = \frac{1}{4}(u_{20} + u_{40} + u_{22}^{(0)} + u_{42}^{(0)}) = \frac{1}{4}(20 + 20 + 30 + 30) = 25.$$

Значение $u_{21}^{(0)}$ находим по формуле (2.5):

$$u_{21}^{(0)} = \frac{1}{4}(u_{20} + u_{22}^{(0)} + u_{11}^{(0)} + u_{31}^{(0)}) = 24{,}4.$$

Из соображений симметрии полагаем

$$u_{51}^{(0)} = u_{11}^{(0)}, \quad u_{41}^{(0)} = u_{21}^{(0)}.$$

Аналогично вычисляются значения $u_{ij}^{(0)}$ при $j = 2, 3, 4, 5$.

2. Вычисление последовательных приближений. Заметим, что в силу симметрии достаточно вести вычисления для четверти квадрата. Для ускорения сходимости итераций поступим следующим образом. Находим $u_{11}^{(1)}$ по формуле (3.1) при $k = 1$:

$$u_{11}^{(1)} = \frac{1}{4}(u_{10} + u_{12}^{(0)} + u_{01} + u_{21}^{(0)}) = 22{,}3.$$

Полученное значение используем при вычислении $u_{21}^{(1)}$, т. е.

$$u_{21}^{(1)} = \frac{1}{4}(u_{11}^{(1)} + u_{31}^{(0)} + u_{20} + u_{24}^{(0)}) = \frac{1}{4}(22{,}3 + 25 + 20 + 30) = 24{,}3.$$

При вычислении $u_{31}^{(1)}$ используем значения $u_{21}^{(1)} = u_{41}^{(1)}$ и т. д. Процесс итераций продолжаем до тех пор, пока результаты двух последовательных приближений будут отличаться не более чем на 0,1. Результаты последовательных приближений для четверти квадрата приведены в табл. 3.2.

Пример 3.3. В табл. 3.3 дано приближенное решение уравнения Лапласа для единичного квадрата при указанных краевых значениях с шагом $h = 0{,}1$. Требуется оценить погрешность этого решения по методу Рунге.

Решение. Заново решаем задачу с шагом $2h = 0{,}2$, взяв начальное приближение из табл. 3.3. Результаты вычислений с шагом

Таблица 3.2

Результаты итераций для примера 3.2

40	33,1	30,6	29,6	30,6
60 40 20	40,3 33,1 22,3	32,9 30,6 24,3	31,2 29,6 27,2	32,9 30,6 24,3
0	10	20	30	20

40	33,2	30,2	29,9	30,2
60 40 20	39,8 33,2 21,9	32,8 30,2 24,9	31,3 29,9 27,4	32,8 30,2 24,9
0	10	20	30	20

40	33,1	30,2	29,9	30,2
60 40 20	39,8 33,1 22,0	32,8 30,2 24,9	31,3 29,9 27,4	32,8 30,2 24,9
0	10	20	30	20

Таблица 3.3

Приближенное решение краевой задачи с шагом $h=0,1$

	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
6,75	5,86	5,06	4,34	3,68	3,04	2,42	1,82	1,21	0,60	0,00
13,38	11,60	10,04	8,63	7,32	6,06	4,84	3,63	2,42		0,00
19,70	17,12	14,86	12,81	10,89	9,04	7,23	5,43			0,00
25,60	22,34	19,47	16,85	14,38	11,98	9,60				0,00
30,95	27,17	23,82	20,73	17,78	14,88					0,00
35,66	31,56	27,89	24,46	21,12						0,00
39,67	35,50	31,72	28,09							0,00
42,98	39,05	35,38								0,00
45,63	42,34									0,00
	45,63	42,98	39,67	35,66	30,95	25,60	19,70	13,38	6,75	

$2h=0,2$ приведены в табл. 3.4. Затем находим разности $u_h - u_{2h}$ значений искомого решения, полученных с шагами $h=0,1$ и $2h=0,2$, и вычисляем погрешность ε_h по формуле (3.2) (см. табл. 3.5 и 3.6).

Таблица 3.4

Приближенное решение краевой задачи с шагом $2h = 0,2$

	0,00	0,00	0,00	0,00	
13,38	10,05	7,32	11,84	2,42	0,00
25,60	19,50	14,40	9,62		0,00
35,66	27,95	21,17			0,00
42,98	35,46				0,00
	42,98	35,66	25,60	13,38	

Таблица 3.5

Разности $u_h - u_{2h}$

0,01	0,00	0,00	0,00
0,03	0,02	0,02	
0,06	0,05		
0,08			

Таблица 3.6

Погрешности ε_h

	0,003		0,000		0,000		0,000	
	0,010		0,007		0,007			
	0,020		0,017					
	0,027							

ЗАДАЧИ

1. Применяя метод усреднения Либмана, найти приближенное решение уравнения Лапласа с шагом $h = 1/8$ в квадрате с вершинами $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$. Краевые условия приведены в табл. 3.7. Итерации проводить с точностью до 10^{-2}.

2. Найти приближенное решение уравнения Лапласа в квадрате $ABCD$ для краевых условий, указанных в табл. 3.8, с шагом $h = 1/6$ при следующих значениях параметров:

$$\alpha = 0,9 + 0,1 \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, \quad \beta = 1,01 + 0,02 \cdot n, \quad n = 0, 1, 2.$$

Итерации проводить с точностью до 10^{-2}.

3. Найти приближенные решения уравнения Лапласа для областей и краевых условий, данных на рис. 13, *а*—*в*. Итерации проводить до тех пор, пока разности между последовательными значениями функции для всех точек не станут меньше 0,005.

4. Найти приближенное решение уравнения Лапласа для единичного квадрата с шагом $h = 1/8$. Краевые условия на левой стороне

Таблица 3.7

Краевые условия задачи 1

Варианты	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$30y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	0
3	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
5	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
7	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
8	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
9	$40y^2$	40	40	$40\sin\frac{\pi x}{2}$
10	$50y$	$50(1-x)$	0	$60x,\ 0\leqslant x<1/2$ $60(1-x),\ 1/2\leqslant x\leqslant 1$

Таблица 3.8

Краевые условия задачи 2

$u\|_{AD}$	0	17,28	$29{,}05\alpha$	40,00	$29{,}05\beta$	17,28	4,31
$u\|_{BC}$	0	9,81	$17{,}98\alpha$	29,12	$38{,}25\beta$	42,31	50,00
$u\|_{AB}$	0	0	0	0	0	0	0
$u\|_{DC}$	4,31	6,98	$12{,}38\beta$	19,14	$30{,}10\alpha$	40,16	50,00

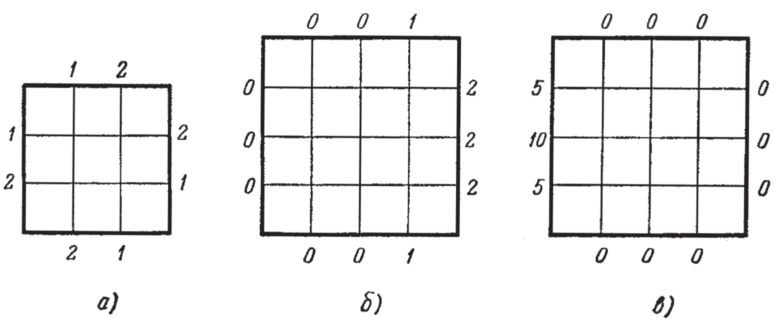

Рис. 13.

квадрата принять равными 2,5; 5,0; 7,5; 10,0; 7,5; 5,0; 2,5; остальные краевые значения равны нулю. Итерации вести с точностью до 10^{-4}.

При выборе начального приближения использовать решение задачи 3, *в*.

§ 4. Решение краевых задач для криволинейных областей

Если граница Г области G криволинейна, то значения u_{ij} для граничных узлов получают путем переноса значений из точек границы Г. Погрешность, получаемую в результате такого переноса,

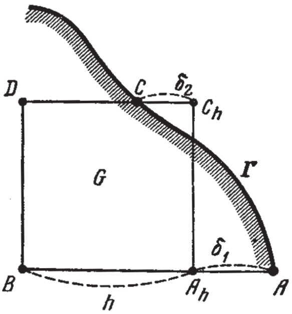

Рис. 14.

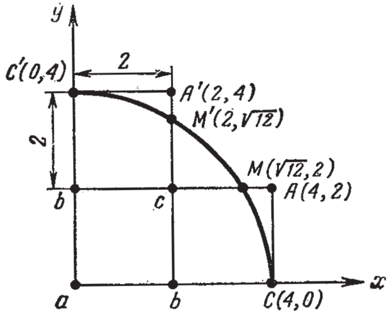

Рис. 15.

можно значительно уменьшить, если для каждого граничного узла составлять уравнение следующего вида (см. [2], [13], [35]):

1) для узла A_h (рис. 14)

$$u_{A_h} = \frac{\delta_1 u_B + h u_A}{\delta_1 + h}; \tag{4.1}$$

2) для узла C_h (рис. 14)

$$u_{C_h} = \frac{\delta_2 u_D - h u_C}{\delta_2 - h}. \tag{4.2}$$

Получив одно из таких уравнений для каждого граничного узла и присоединив их к системе (2.4) или (2.5), получим систему алгебраических уравнений относительно значений u_{ij} в узлах сетки. Если эту систему решать методом Либмана, то последовательные приближения граничных значений будут вычисляться по формулам

$$u_{A_h}^{(k+1)} = u_A + \frac{u_B^{(k)} - u_A}{h + \delta_1}\,\delta_1, \tag{4.3}$$

$$u_{C_h}^{(k+1)} = u_C + \frac{u_D^{(k)} - u_C}{\delta_2 - h}\,\delta_2. \tag{4.4}$$

Пример 4.1. Найти приближенное решение уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{4.5}$$

удовлетворяющее на окружности $x^2+y^2=16$ условию

$$u|_\Gamma = x^2y^2. \tag{4.6}$$

Решение. В силу симметрии решения рассмотрим четверть круга. Порядок заполнения шаблонов.

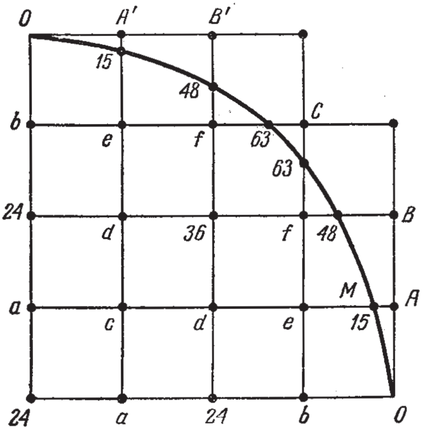

Рис. 16.

1) Берем крупную сетку с шагом $h=2$ (рис. 15). Ближайшая к узлу $A(4, 2)$ сетки точка границы Γ есть $M(\sqrt{12},\ 2)$, поэтому полагаем

$$u(A)\approx u(M)=12\cdot 2^2=48.$$

Аналогично, для узла сетки $A'(2, 4)$ ближайшая точка границы есть $M'(2, \sqrt{12})$, поэтому $u(A')\approx u(M')=48$.

В узлах $C(4, 0)$ и $C'(0, 4)$ сетки, очевидно, имеем

$$u(C)=u(C')=0.$$

Обозначая для удобства через a, b, c значения функции $u(x, y)$ во внутренних узлах сетки (рис. 15) и учитывая симметрию задачи, составляем систему конечно-разностных уравнений

$$a=\frac{1}{4}\cdot 4b, \qquad b=\frac{1}{4}(2c+a+0), \qquad c=\frac{1}{4}(48+48+2b).$$

Из этой системы находим

$$a=24, \qquad b=24, \qquad c=36.$$

2) Берем более мелкую сетку (рис. 16) с шагом $h=1$ при неуточненных граничных значениях. Полагаем

$$u(A)=u(A')=15, \qquad u(B)=u(B')=48, \qquad u(C)=63.$$

Используя значения функции $u(x, y)$ в узлах крупной сетки с шагом $h=2$ и в граничных узлах и учитывая симметрию задачи, составляем конечно-разностные уравнения для значений a, b, c, d, e, f (рис. 16), причем для значений a, b, d, f составляем уравнения (2.5), а для значений c и e — уравнения (2.6). Таким образом, получаем

$$a=\frac{1}{4}(24+24+c+c), \qquad f=\frac{1}{4}(48+e+63+36),$$

$$b=\frac{1}{4}(e+e+0+24), \qquad c=\frac{1}{4}(24+24+24+36),$$

$$d=\frac{1}{4}(e+c+24+36), \qquad e=\frac{1}{4}(0+36+48+24).$$

Отсюда приближенно находим

$$a=26, \quad b=20, \quad c=27, \quad d=28, \quad e=27, \quad f=44.$$

3) Уточняем значения $u(x, y)$ в граничных узлах, используя формулу (4.4). Для узла A будем иметь

$$\delta_A=|MA|=4-\sqrt{15}\approx 0,13,$$

следовательно,

$$u_A^{(1)}=u_M+\frac{e-u_M}{\delta_A-h}\delta_A=15-\frac{1,56}{0,87}\approx 13.$$

Аналогичные вычисления проводим для узла B:

$$\delta_B=|NB|=4-\sqrt{12}\approx 0,6, \quad u_B^{(1)}=u_N+\frac{f-u_N}{\delta_B-h}\delta_B=48+\frac{0,4}{0,4}=49.$$

Таким образом, в граничных узлах получаем

$$u_A^{(1)}=u_{A'}^{(1)}=13, \quad u_B^{(1)}=u_{B'}^{(1)}=49, \quad u_C=73.$$

4) Составляем таблицу начальных значений (шаблон 1) и последовательно уточняем значения искомой функции $u(x, y)$ во внутренних узлах по формулам (3.1) до тех пор, пока значения, полученные в двух последовательных итерациях, будут различаться не более чем на единицу. Результаты вычислений записаны в шаблонах 2—3, приведенных в табл. 4.1. Приближенные значения искомой функции в шаблонах 2 и 3 различаются не более чем на единицу. В шаблоне 3а приводятся для сравнения значения точного решения задачи $u(x, y)=x^2y^2+\frac{1}{8}[256-(x^2+y^2)^2]$ в узлах сетки.

Таблица 4.1

Результаты последовательных итераций для задачи (4.5), (4.6)

Шаблон 1

0	13	49		
20	27	44	73	
24	28	36	44	49
26	27	28	27	13
24	26	24	20	0

Шаблон 2

20	27	46	
26	29	37	46
26	27	29	27
26	26	26	20

Шаблон 3

20	27	46	
26	30	38	46
26	28	30	27
26	26	26	20

Шаблон 3а

0	12	46		
22	28	47	73	
30	33	40	47	46
32	32	33	28	12
32	32	30	22	0

ЗАДАЧИ

Разностным методом с шагом h найти решение уравнения Лапласа в области G при указанных краевых условиях. Решение конечноразностной системы получить методом Либмана с уточнением граничных значений.

1. Шаг $h=0,1$, область G ограничена кривыми $2y=1-4x^2$, $y=0$, $x=0$, краевые условия имеют вид

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{y=0}=(1-4x^2)x, \quad u|_{2y=1-4x^2}=12xy^2.$$

2. Шаг $h=0{,}2$, область G определяется условиями

$$x^2+(y+3)^2 \leqslant 16, \qquad y \geqslant 0,$$

краевые условия имеют вид

а) $u|_{y=0}=0$, $u|_C=2y(2x^2+3y)$, где C — окружность $x^2+(y+3)^2=16$,

б) $u|_{y=0}=x(7-x^2)$, $u|_C=4xy^2$, где C — окружность $x^2+(y+3)^2=16$.

§ 5. Метод сеток для уравнения параболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности, а именно: найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.1}$$

начальному условию

$$u(x, 0)=f(x) \qquad (0<x<s) \tag{5.2}$$

и краевым условиям

$$u(0, t)=\varphi(t), \quad u(s, t)=\psi(t). \tag{5.3}$$

К задаче (5.1)—(5.3) приводит, в частности, задача о распространении тепла в однородном стержне длины s (см. [48], [52]). Путем

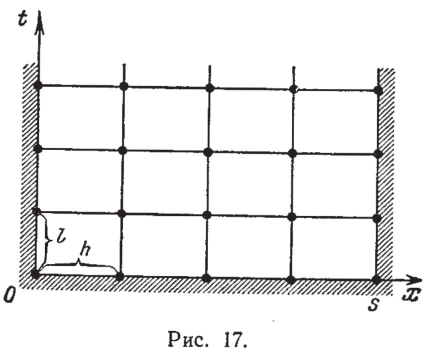

Рис. 17.

введения новой переменной $\tau=a^2t$ уравнение (5.1) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

поэтому в дальнейшем примем $a=1$.

Построим в полуполосе $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant s$ (рис. 17) два семейства параллельных прямых:

$$x=ih \qquad (i=0, 1, 2, \ldots), \qquad t=jl \qquad (j=0, 1, 2, \ldots).$$

Обозначим $x_i = ih$, $t_j = jl$, $u(x_i, t_j) = u_{ij}$ и приближенно заменим в каждом внутреннем узле (x_i, t_j) производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ разностным отношением

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{5.4}$$

а производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ одним из двух разностных отношений

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l}, \tag{5.5}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l}. \tag{5.6}$$

Тогда для уравнения (5.1) при $a = 1$ получаем два типа конечно-разностных уравнений:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{5.7}$$

$$\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}. \tag{5.8}$$

Обозначив $\sigma = l/h^2$, приводим эти уравнения к виду

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma) u_{ij} + \sigma (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \tag{5.9}$$

$$(1 + 2\sigma) u_{ij} - \sigma (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = 0. \tag{5.10}$$

Отметим, что для составления уравнения (5.7) была использована схема узлов, данная на рис. 18 — *явная схема*, для уравнения (5.8) — схема узлов, данная на рис. 19 — *неявная схема*.

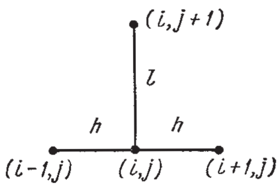

Рис. 18.

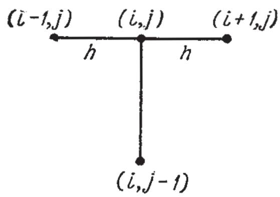

Рис. 19.

При выборе числа σ в уравнениях (5.9), (5.10) следует учитывать два обстоятельства:

1) погрешность замены дифференциального уравнения разностным должна быть наименьшей;

2) разностное уравнение должно быть устойчивым.

Доказано (см. [2], [13]), что уравнение (5.9) будет устойчивым при $0 < \sigma \leqslant 1/2$, а уравнение (5.10) — при любом σ. Наиболее удобный вид уравнение (5.9) имеет при $\sigma=1/2$:

$$u_{i,\,j+1}=\frac{u_{i-1,\,j}+u_{i+1,\,j}}{2}, \tag{5.11}$$

и при $\sigma=1/6$:

$$u_{i,\,j+1}=\frac{1}{6}(u_{i-1,\,j}+4u_{ij}+u_{i+1,\,j}). \tag{5.12}$$

Оценки погрешностей приближенных решений, полученных из уравнений (5.11), (5.12), (5.10) в полосе $0\leqslant x\leqslant s$, $0\leqslant t\leqslant T$, соответственно имеют вид (см. [31])

$$|u-\tilde{u}|\leqslant\frac{T}{3}M_1h^2, \tag{5.13}$$

$$|u-\tilde{u}|\leqslant\frac{T}{135}M_2h^4, \tag{5.14}$$

$$|u-\tilde{u}|\leqslant T\left(\frac{l}{2}+\frac{h^2}{12}\right)M_1, \tag{5.15}$$

где $\tilde{u}$ — точное решение задачи (5.1)—(5.3),

$M_1=\max\{|f^{(4)}(x)|,\ \ |\varphi''(t)|,\ \ |\psi''(t)|\}$ при $0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x\leqslant s$,

$M_2=\max\{|f^{(6)}(x)|,\ \ |\varphi^{(4)}(t)|,\ \ |\psi^{(4)}(t)|\}$ при $0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x\leqslant s$.

Из приведенных оценок погрешностей видно, что уравнение (5.12) дает более высокую точность решения по сравнению с уравнением (5.11). Но уравнение (5.11) имеет более простой вид, а, кроме того, шаг l по аргументу t для уравнения (5.12) должен быть значительно меньше, что приводит к большему объему вычислений. Уравнение (5.10) дает меньшую точность, но при этом шаги l и h выбираются независимо друг от друга. Уравнения (5.11) и (5.12) позволяют вычислить значения функции $u(x,\ y)$ на каждом слое по явным формулам через значения на предыдущем слое; уравнение (5.10) (неявная схема) этим свойством не обладает.

Методом сеток можно решать смешанную краевую задачу для неоднородного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,\ t).$$

Тогда соответствующее разностное уравнение, использующее явную схему узлов, имеет вид

$$u_{i,\,j+1}=(1-2\sigma)\,u_{ij}+\sigma(u_{i+1,\,j}+u_{i-1,\,j})+lF_{ij}. \tag{5.16}$$

Отсюда получаем при $\sigma=1/2$

$$u_{i,\,j+1}=\frac{1}{2}(u_{i+1,\,j}+u_{i-1,\,j})+lF_{ij}, \tag{5.17}$$

при $\sigma=1/6$

$$u_{i,\,j+1}=\frac{1}{6}(u_{i-1,\,j}+4u_{ij}+u_{i+1,\,j})+lF_{ij}. \tag{5.18}$$

В этом случае имеют место следующие оценки погрешности (см. [31]): для уравнения (5.17)

$$|\tilde{u}-u|\leqslant\frac{T}{4}\left(M_2+\frac{1}{3}M_4\right)h^2,$$

для уравнения (5.18)

$$|\tilde{u}-u| \leqslant \frac{T}{72}\left(\frac{1}{3} M_3+\frac{1}{5} M_6\right) h^4,$$

где

$$M_2=\max\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|, \quad M_3=\max\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|, \quad M_4=\max\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|, \qquad M_6=\max\left|\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right|.$$

Пример 5.1. Используя разностное уравнение (5.11), найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.19}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0)=\sin \pi x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \text{ и } (0, t)=u(1, t)=0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 0{,}025). \tag{5.20}$$

Решение. Выберем по аргументу x шаг $h=0{,}1$. Так как $\sigma=1/2$, получаем по аргументу t шаг $l=h^2/2=0{,}005$. Записываем в табл. 5.1 начальные и краевые значения. Учитывая их симметрию, заполняем таблицу только для $x=0$; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Значения функции $u(x, t)$ на первом слое находим, используя значения на начальном слое и краевые условия, по формуле (5.11) при $j=0$:

$$u_{i1}=\frac{u_{i+1,0}+u_{i-1,0}}{2}.$$

Таким образом, получаем

$$u_{11}=\frac{1}{2}(u_{20}+u_{00})=\frac{1}{2}(0{,}5878+0)=0{,}2939,$$

$$u_{21}=\frac{1}{2}(u_{30}+u_{10})=\frac{1}{2}(0{,}8090+0{,}3090)=0{,}5590$$

и т. д.

Записываем полученные значения u_{i1} $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ во вторую строку табл. 5.1. После этого переходим к вычислению значений

Таблица 5.1

Решение задачи (5.19), (5.20) по формуле (5.11)

j	t \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0,3090	0,5878	0,8090	0,9511	1,0000
1	0,005	0	0,2939	0,5590	0,7699	0,9045	0,9511
2	0,010	0	0,3795	0,5316	0,7318	0,8602	0,9045
3	0,015	0	0,2658	0,5056	0,6959	0,8182	0,8602
4	0,020	0	0,2528	0,4808	0,6619	0,7780	0,8182
5	0,025	0	0,2404	0,4574	0,6294	0,7400	0,7780
$\tilde{u}(x, t)$	0,025	0	0,2414	0,4593	0,6321	0,7431	0,7813
$\lvert\tilde{u}-u\rvert$	0,025	0	0,0010	0,0019	0,0027	0,0031	0,0033

на втором слое по формуле (5.11) при $j=1$:

$$u_{i2}=\frac{u_{i+1,1}+u_{i-1,1}}{2}.$$

Подобным образом определяем последовательно значения u_{ij} при $t=0{,}005$; $0{,}010$; $0{,}015$; $0{,}020$; $0{,}025$. В двух последних строках таблицы приведены значения точного решения задачи $\tilde{u}(x, t)=$ $=e^{-\pi^2 t}\sin\pi x$ и модуля разности $|\tilde{u}-u|$ при $t=0{,}025$.

Для сравнения приведем оценку погрешности, полученную по формуле (5.13). Для данной задачи $\varphi(t)=\psi(t)=0$, $f^{(4)}(x)=\pi^4\sin\pi x$, следовательно, $M_1=\pi^4$. Таким образом, получаем

$$|\tilde{u}-u|\leqslant\frac{0{,}025}{3}\pi^4h^2=\frac{0{,}025}{3}\cdot 97{,}22\cdot 0{,}01=0{,}0081.$$

Пример 5.2. Используя разностное уравнение (5.12), найти решение задачи (5.19), (5.20) при $0\leqslant t\leqslant 0{,}01$. Дать оценку погрешности полученного решения.

Решение. Выберем по аргументу x шаг $h=0{,}1$. Так как для формулы (5.12) $\sigma=1/6$, получаем по аргументу t шаг $l=\frac{0{,}01}{6}\approx 0{,}0017$. Заносим в табл. 5.2 начальные и краевые

Таблица 5.2

Решение задачи (5.19), (5.20) по формуле (5.12)

j	t \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0,309017	0,587785	0,809017	0,951057	0,000000
1	0,0017	0	0,303976	0,578196	0,795818	0,935541	0,983686
2	0,0033	0	0,299017	0,568763	0,782835	0,920278	0,967638
3	0,0050	0	0,294138	0,559484	0,770063	0,905264	0,951852
4	0,0067	0	0,289339	0,550356	0,757500	0,890495	0,936322
5	0,0083	0	0,284619	0,541377	0,745142	0,875967	0,921046
6	0,0100	0	0,279976	0,532545	0,732982	0,861676	0,906019
$\tilde{u}(x, t)$	0,01	0	0,279975	0,532544	0,732984	0,861675	0,906018

значения. В силу симметрии решения достаточно заполнить таблицу для $0\leqslant x\leqslant 0{,}5$. Затем приступаем к вычислениям по формуле (5.12). Для первого слоя при $j=1$ получаем

$$u_{i1}=\frac{1}{6}(u_{00}+4u_{10}+u_{20}),$$

откуда последовательно находим

$$u_{11}=\frac{1}{6}(0+4\cdot 0{,}309017+0{,}587785)=0{,}303976,$$

$$u_{21}=\frac{1}{6}(0{,}309017+4\cdot 0{,}587785+0{,}809017)=0{,}578196,$$

. . . .

$$u_{51}=\frac{1}{6}(0{,}951057=4\cdot 1+0{,}951057)=0{,}983686.$$

Вычисления для последующих слоев проводятся аналогично. Для оценки погрешности по формуле (5.14) при $t=0{,}01$ имеем $\varphi(t)=\psi(t)=0$, $f^{(6)}x=\pi^6\sin\pi x$, $M_2=\pi^6$. Таким образом,

$$|u-\tilde{u}|\leqslant\frac{0{,}01}{135}\pi^6h^4\approx\frac{0{,}01}{135}958{,}6\cdot 10^{-4}\approx 7\cdot 10^{-6}.$$

В последней строке табл. 5.2 приведены значения точного решения $\breve{u}=e^{-\pi^2 t}\sin\pi x$ при $t=0{,}01$. Сравнение показывает, что погрешность полученного решения не превосходит $2\cdot 10^{-6}$.

ЗАДАЧИ

Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,\ 0)=f(x),\qquad u(0,\ t)=\varphi(t),\qquad u(1,\ t)=\psi(t),$$

для значений $0\leqslant t\leqslant T$, взяв по аргументу x шаг $h=0{,}1$. В задачах 1—3 использовать разностное уравнение (5.11), в задачах 4—6 разностное уравнение (5.12).

1. $f(x)=(ax^2+b)\sin\pi x$, $\varphi(t)=\psi(t)=0$, $T=0{,}02$, $a=1{,}1$; $1{,}3$; $1{,}5$, $b=1{,}1+0{,}1\cdot n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

2. $f(x)=e^{-bx}\sin ax$, $\varphi(t)=0$, $\psi(t)=e^{-b}\sin a$, $T=0{,}02$, $a=\pi/12$, $\pi/4$, $\pi/3$, $b=0{,}1\cdot k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ 5$.

3. $\varphi(t)=\psi(t)=0$, $f(x)$ задана таблицей

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	0	0,0196	$0{,}0431+a$	0,0742	0,1116	$0{,}1537+2a$

x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x)$	0,1994	0,1256	$0{,}0614-a$	0,0031	0

$T=0{,}02$, $a=0{,}02\cdot n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 5$.

4. $f(x)=(ax^2+b)e^{-x}$, $\varphi(t)=b$, $\psi(t)=(a+b)e^{-1}$, $T=0{,}01$, $a=1{,}1$; $1{,}3$; $1{,}5$, $b=2{,}1+0{,}1\cdot n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

5. $f(x)=x(1-x)(ax^4+b)$, $\varphi(t)=\psi(t)=0$, $T=0{,}01$, $a=0{,}5$; $0{,}7$; $0{,}9$, $b=0{,}5+0{,}1\cdot n$, $n=0, 1, 2, 3, 4$.

6. $\varphi(t)=0$, $\psi(t)=f(1)$, $f(x)$ задана таблицей

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	0	0,0221	$0{,}0425+a$	0,1008	0,1545

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x)$	$0{,}1721+2a$	0,2032	0,2895	$0{,}3581-a$	0,4010	0,4500

$T=0{,}01$, $a=0{,}02\cdot n$, $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

7. Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+2x+t$$

с шагом $h=0{,}1$ по аргументу x, удовлетворяющее начальным и краевым условиям задачи 1. Использовать разностное уравнение (5.17).

8. Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3t\sin x$$

с шагом $h=0{,}1$ по аргументу x, удовлетворяющее начальным и краевым условиям задачи 2. Использовать разностное уравнение (5.18).

§ 6. Метод прогонки для уравнения теплопроводности

Пусть требуется в полосе $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant t\leqslant T$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0)=f(x), \qquad u(0, t)=\varphi(t), \qquad u(a, t)=\psi(t). \tag{6.2}$$

Выбираем шаги h, l по аргументам x и t соответственно, в каждом внутреннем узле заменяем производные конечно-разностными отношениями (5.4), (5.6), вычисляем значения функций $f(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ в граничных узлах и, обозначив $s=h^2/l$, получаем систему

$$u_{i-1,\,j+1}-(2+s)\,u_{i,\,j+1}+u_{i+1,\,j+1}+su_{ij}=0$$
$$(i=1, 2, \ldots, n;\ j=0, 1, 2, \ldots), \tag{6.3}$$

$$u_{i0}=f(x_i), \tag{6.4}$$

$$u_{0j}=\varphi(t_j), \tag{6.5}$$

$$u_{nj}=\psi(t_j). \tag{6.6}$$

Метод прогонки (см. [2], [13], [31]) решения системы (6.3)—(6.6) заключается в том, что уравнения (6.3) приводятся к виду

$$u_{i,\,j+1}=a_{i,\,j+1}(b_{i,\,j+1}+u_{i+1,\,j+1}), \tag{6.7}$$

где числа $a_{i,j+1}$, $b_{i,j+1}$ определяются последовательно по формулам

$$a_{1,\,j+1}=\frac{1}{2+s}, \quad b_{1,\,j+1}=\varphi(t_{j+1})+su_{1j}, \tag{6.8}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{i,\,j+1}&=\frac{1}{2+s-a_{i-1,\,j+1}},\\ b_{i,\,j+1}&=a_{i-1,\,j+1}b_{i-1,\,j+1}+su_{ij}\\ &(i=2,\,3,\,\ldots,\,n).\end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Затем из краевого условия (6.6) находим

$$u_{n,\,j+1}=\psi(t_{j+1})$$

и последовательно определяем значения $u_{i,\,j+1}$ $(i=n-1,\,\ldots,\,1)$ по формуле (6.7).

Таким образом, метод прогонки позволяет определить значения функции $u(x,\ t)$ на слое $t=t_{j+1}$, если известны ее значения на слое $t=t_j$.

Порядок решения задачи.

Прямой ход. Используя краевые условия (6.5), по формулам (6.8), (6.9) находим числа $a_{1,\,j+1}$, $b_{1,\,j+1}$, $a_{i,\,j+1}$, $b_{i,\,j+1}$ $(i=2,3,\,\ldots,\,n)$.

Обратный ход. Из краевого условия (6.6) получаем $u_{n,\,j+1}=\psi(t_{j+1})$. Затем по формуле (6.7) вычисляем

$$\left.\begin{aligned} u_{n-1,\,j+1}&=(u_{n,\,j+1}+b_{n-1,\,j+1})\,a_{n-1,\,j+1},\\ u_{n-2,\,j+1}&=(u_{n-1,\,j+1}+b_{n-2,\,j+1})\,a_{n-2,\,j+1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_{1,\,j+1}&=(u_{2,\,j+1}+b_{1,\,j+1})\,a_{1,\,j+1}.\end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

Пример 6.1. Методом прогонки найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.11}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=4x(1-x), \qquad u(0,t)=u(1,t)=0. \tag{6.12}$$

Решение. Возьмем $h=0{,}1$, $l=0{,}01$, следовательно $s=h^2/l=1$. Найдем методом прогонки значения функции $u(x,t)$ на слое $t=0{,}01$.

Прямой ход. Записываем в строке u_{i0} табл. 6.1 значения начальной функции $f(x_i)$ $(i=0,1,\ldots,10)$, находим по формулам (6.8) при $j=0$ числа

$$a_{11}=\frac{1}{3}, \qquad b_{11}=u_{10}=0{,}36.$$

Затем по формулам (6.9) при $j=0$ последовательно вычисляем

$$a_{21}=\frac{1}{3-a_{11}}=\frac{3}{8}=0{,}375, \qquad b_{21}=a_{11}b_{11}+u_{20}=0{,}12+0{,}64=0{,}760,$$

$$a_{31}=\frac{1}{3-a_{21}}=\frac{1}{2{,}625}=0{,}381, \quad b_{31}=a_{21}b_{21}+u_{30}=0{,}375\cdot 0{,}760+0{,}84=\\=1{,}125$$

и т. д.

Результаты вычислений записываем в строках a_{i1}, b_{i1} табл. 6.1.

Таблица 6.1

Решение задачи (6.11), (6.12) методом прогонки

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_{i0}	0	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360	0
a_{i1}		0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	
b_{i1}		0,360	0,760	1,125	1,389	1,530	1,544	1,430	1,186	0,813	
u_{i1}	0	0,310	0,572	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0,310	0

Обратный ход. Из краевых условий получаем

$$u_{10,\,1}=0.$$

Значения u_{i1} $(i=9, 8, \ldots, 1)$ вычисляем по формулам (6.10) при $j=0$:

$$u_{91}=(u_{10,\,1}+b_{91})\,a_{91}=0{,}813\cdot 0{,}382=0{,}310,$$
$$u_{81}=(u_{91}+b_{81})\,a_{81}=(0{,}310+1{,}186)\cdot 0{,}382=0{,}571,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{11}=(u_{21}+b_{11})\,a_{11}=(0{,}572+0{,}360)\cdot 0{,}333=0{,}310.$$

ЗАДАЧИ

Задачи 1—3 из § 5 решить методом прогонки и сравнить результаты.

§ 7. Метод сеток для уравнения гиперболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения колебания струны, заключающуюся в отыскании функции, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.1}$$

а также начальным условиям

$$u(x, 0)=f(x), \qquad u_t(x, 0)=\Phi(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant s) \tag{7.2}$$

и краевым условиям

$$u(0, t)=\varphi(t), \qquad u(s, t)=\psi(t). \tag{7.3}$$

Так как введение переменной $\tau = at$ приводит уравнение (7.1) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.4}$$

то в дальнейшем можем принять $a = 1$.

Построив в полуполосе $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant s$ (рис. 20) два семейства параллельных прямых

$$x = ih \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$
$$t = jl \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

заменяем производные в уравнении (7.4) разностными отношениями.

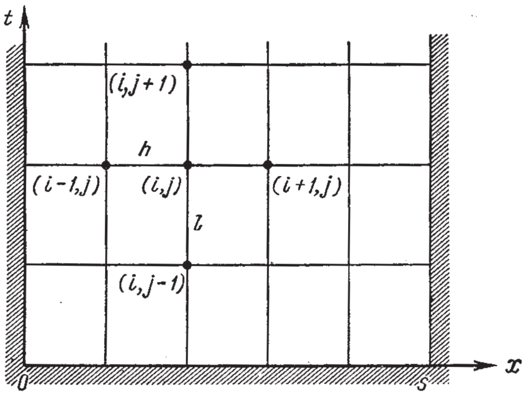

Рис. 20.

Пользуясь симметричными формулами для производных, будем иметь

$$\frac{u_{i,\,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,\,j-1}}{l^2} = \frac{u_{i+1,\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,\,j}}{h^2}. \tag{7.5}$$

Обозначив $\alpha = l/h$, получим разностное уравнение

$$u_{i,\,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,\,j-1} + \alpha^2 (u_{i+1,\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,\,j}). \tag{7.6}$$

Доказано (см. [2]), что при $\alpha \leqslant 1$ это разностное уравнение *устойчиво*.

В частности, при $\alpha = 1$ уравнение (7.6) имеет наиболее простой вид:

$$u_{i,\,j+1} = u_{i+1,\,j} + u_{i-1,\,j} - u_{i,\,j-1}. \tag{7.7}$$

Оценка погрешности (см. [2]) приближенного решения, полученного из уравнения (7.6) в полосе $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 < t \leqslant T$, имеет вид

$$|\tilde{u} - u| \leqslant \frac{h^2}{12} [(M_4 h + 2M_3) T + T^2 M_4], \tag{7.8}$$

где $\tilde{u}$ — точное решение, $M_k = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \right\}$ $(k = 3, 4)$.

Заметим, что для получения уравнения (7.6) была использована схема узлов, отмеченных на рис. 20. Эта схема является явной, так как уравнение (7.6) позволяет найти значения функции $u(x, t)$ на слое t_{j+1}, если известны значения на двух предыдущих слоях. Для того чтобы найти приближенное решение задачи (7.1)—(7.3), необходимо знать значения решения на двух начальных слоях. Их можно найти из начальных условий одним из следующих способов.

Первый способ. Заменяем в начальном условии (7.2) производную $u_t(x, 0)$ разностным отношением

$$\frac{u_{i1}-u_{i0}}{l}=\Phi(x_i)=\Phi_i;$$

для определения значений $u(x, t)$ на слоях $j=0, j=1$, получаем

$$u_{i0}=f_i, \qquad u_{i1}=f_i+l\Phi_i. \tag{7.9}$$

Оценка погрешности значений u_{i1} в этом случае имеет вид (см. [2])

$$|\tilde{u}_{i1}-u_{i1}|\leqslant\frac{\alpha h}{2}M_2, \tag{7.10}$$

где

$$M_2=\max\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\right\}.$$

Второй способ. Заменяем производную $u_t(x, 0)$ разностным отношением $\frac{u_{i1}-u_{i,-1}}{2l}$, где $u_{i,-1}$—значения функции $u(x, t)$ на слое $j=-1$. Тогда из начальных условий (7.2) будем иметь

$$u_{i0}=f_i, \qquad \frac{u_{i1}-u_{i,-1}}{2l}=\Phi_i. \tag{7.11}$$

Напишем разностное уравнение (7.7) для слоя $j=0$:

$$u_{i1}=u_{i+1,0}+u_{i-1,0}-u_{i,-1}. \tag{7.12}$$

Исключив из уравнений (7.11), (7.12) значения $u_{i,-1}$, получим

$$u_{i0}=f_i, \qquad u_{i1}=\frac{1}{2}(f_{i+1}+f_{i-1})+l\Phi_i. \tag{7.13}$$

Оценка погрешности значений u_{i1} имеет вид (см. [2])

$$|\tilde{u}_{i1}-u_{i1}|\leqslant\frac{h^4}{12}M_4+\frac{h^3}{6}M_3, \tag{7.14}$$

где

$$M_k=\max\left\{\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|, \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|\right\} \qquad (k=3, 4).$$

Этот способ вычисления начальных значений рассмотрен в примере 7.1.

Третий способ. Если функция $f(x)$ имеет конечную вторую производную, то значения u_{i1} можно определить с помощью формулы Тейлора

$$u_{i1} \approx u_{i0} + l\frac{\partial u_{i0}}{\partial t} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}. \qquad (7.15)$$

Используя уравнение (7.4) и начальные условия (7.2), можем записать

$$u_{i0} = f_i, \qquad \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} = \Phi_i, \qquad \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2} = f_i''.$$

Тогда по формуле (7.15) будем иметь

$$u_{i1} \approx f_i + l\Phi_i + \frac{l^2}{2} f_i''. \qquad (7.16)$$

Погрешность значений u_{i1}, полученных по этой формуле, имеет порядок $O(l^3)$.

Такой способ вычисления начальных значений рассмотрен в примере 7.2.

Замечание. Аналогичным образом применяется метод сеток при решении смешанной краевой задачи для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t).$$

В этом случае разностное уравнение имеет вид

$$u_{i,\,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,\,j-1} + \alpha^2 (u_{i+1,\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,\,j}) + \alpha^2 h^2 F_{ij}.$$

Пример 7.1. Методом сеток найти решение задачи

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,\ 0) = 0{,}2x(1-x)\sin \pi x, \qquad u_t(x,\ 0) = 0, \\ u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0. \end{array}\right\} \qquad (7.17)$$

Решение. Возьмем квадратную сетку с шагом $h = l = 0{,}05$. Значения $u(x,\ t)$ на двух начальных слоях найдем вторым способом (стр. 288). Учитывая, что $\Phi(x) = 0$ и $f(x) = 0{,}2x(1-x)\sin \pi x$, будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} u_{i0} = f_i, \\ u_{i1} = \dfrac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) \\ (i = 0, 1, 2, \ldots, 10). \end{array}\right\} \qquad (7.18)$$

Порядок заполнения таблицы.

1) Вычисляем значения $u_{i0} = f(x_i)$ при $x_i = ih$ и записываем в первую строку (она соответствует значению $t_0 = 0$) табл. 7.1. В силу симметрии задачи заполняем таблицу при $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$. В первом столбце (он соответствует значению $x_0 = 0$) записываем краевые значения.

2) По формуле (7.18) находим u_{i1}, используя значения u_{i0} из первой строки. Результаты записываем во вторую строку табл. 7.1.

3) Вычисляем значения u_{ij} на последующих слоях по формуле (7.7). При $j=1$ последовательно получаем

$$u_{12}=u_{21}+u_{01}-u_{10}=0{,}0065+0-0{,}0015=0{,}0050,$$
$$u_{22}=u_{31}+u_{11}-u_{20}=0{,}0122+0{,}0028-0{,}0056=0{,}0094,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{10,2}=u_{11,1}+u_{91}-u_{10,0}=0{,}0478+0{,}0478-0{,}0500=0{,}0456.$$

Вычисления при $j=2, 3, \dots, 10$ проводятся аналогично. В последней строке таблицы приведены значения точного решения при $t=0{,}5$.

Таблица 7.1

Решение задачи (7.17)

t_j \ x_i	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
0	0	0,0015	0,0056	0,0116	0,0188	0,0265
0,05	0	0,0028	0,0065	0,0122	0,0190	0,0264
0,10	0	0,0050	0,0094	0,0139	0,0198	0,0260
0,15	0	0,0066	0,0124	0,0170	0,0209	0,0256
0,20	0	0,0074	0,0142	0,0194	0,0228	0,0251
0,25	0	0,0076	0,0144	0,0200	0,0236	0,0249
0,30	0	0,0070	0,0134	0,0186	0,0221	0,0236
0,35	0	0,0058	0,0112	0,0155	0,0186	0,0199
0,40	0	0,0042	0,0079	0,0112	0,0133	0,0144
0,45	0	0,0021	0,0042	0,0057	0,0070	0,0074
0,50	0	—0,0001	—0,0001	0,0000	—0,0002	0,0000
$\tilde{u}(x_i, 0{,}5)$	0	0	0	0	0	0

t_j \ x_i	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,0340	0,0405	0,0457	0,0489	0,0500
0,05	0,0335	0,0398	0,0447	0,0478	0,0489
0,10	0,0322	0,0377	0,0419	0,0447	0,0456
0,15	0,0302	0,0343	0,0377	0,0397	0,0405
0,20	0,0277	0,0302	0,0321	0,0335	0,0338
0,25	0,0251	0,0255	0,0260	0,0262	0,0265
0,30	0,0227	0,0209	0,0196	0,0190	0,0186
0,35	0,0194	0,0168	0,0139	0,0120	0,0115
0,40	0,0140	0,0124	0,0092	0,0064	0,0054
0,45	0,0074	0,0064	0,0042	0,0026	0,0013
0,50	—0,0002	—0,0001	—0,0002	—0,0002	—0,0002
$\tilde{u}(x_i, 0{,}5)$	0	0	0	0	0

Пример 7.2. Методом сеток найти решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ &u(x, 0)=x(\pi-x), \quad u_t(x, 0)=0,\\ &u(0, t)=u(\pi, t)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.19)$$

Решение. Выбираем шаг $h=l=\pi/18$. Значения $u(x,\ t)$ на первых двух слоях найдем третьим способом (см. стр. 288), используя формулу Тейлора.

Порядок заполнения таблицы.

1) Вычисляем значения $u_{i0}=f_i=x_i(\pi-x_i)$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ 18)$ и записываем в первую строку табл. 7.2. В силу симметрии задачи заполняем таблицу для $0\leqslant x\leqslant\pi/2$. В первый столбец таблицы записываем краевые значения.

2) Определяем u_{i1}. В нашей задаче $\Phi_i=0$, $f_i''=-2$. Таким образом, по формуле (7.16) будем иметь

$$u_{i1}=u_{i0}-h^2=u_{i0}-0{,}03048.$$

Отсюда находим значения u_{i1} и записываем во вторую строку таблицы.

3) Вычисляем значения $u_{i,\ j+1}$ при $j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ по формуле (7.7). При $j=2$ получаем

$$\begin{aligned}
&u_{12}=u_{21}+u_{01}-u_{10}=0{,}944+0-0{,}518=0{,}426,\\
&u_{22}=u_{31}+u_{11}-u_{20}=1{,}340+0{,}487-0{,}975=0{,}853,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{92}=u_{10,2}+u_{81}-u_{90}=2{,}406+2{,}406-2{,}467=2{,}346.
\end{aligned}$$

Вычисления на последующих слоях проводятся аналогично.

Таблица 7.2

Решение задачи (7.19)

j	t_j \ x_i	0	$\pi/18$	$\pi/9$	$\pi/6$	$2\pi/9$	$5\pi/18$	$\pi/3$	$7\pi/18$	$4\pi/9$	$\pi/2$
0	0	0	0,518	0,975	1,371	1,706	1,980	2,193	2,346	2,437	2,467
1	h	0	0,487	0,944	1,340	1,675	1,950	2,163	2,315	2,406	2,437
2	$2h$	0	0,426	0,853	1,249	1,584	1,858	2,071	2,224	2,315	2,346
3	$3h$	0	0,366	0,731	1,097	1,432	1,706	1,919	2,071	2,163	2,193
4	$4h$	0	0,305	0,609	0,914	1,218	1,493	1,706	1,858	1,950	1,980
5	$5h$	0	0,244	0,487	0,731	0,975	1,218	1,432	1,584	1,675	1,706

ЗАДАЧИ

В задачах 1—3 найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,\ 0)=f(x),\quad u_t(x,\ 0)=\Phi(x),$$
$$u(0,\ t)=\varphi(t),\quad u(1,\ t)=\psi(t)$$

для $0\leqslant t\leqslant 0{,}5$, $0\leqslant x\leqslant 1$, взяв по аргументу x шаг $h=0{,}1$.

1. $f(x)=(ax^2+1{,}1)\sin\pi x$, $\Phi(x)=0$, $\varphi(t)=\psi(t)=0$, $a=1{,}1+0{,}1\cdot n$, $n=0, 1, 2, 3, 4$.

Для вычисления значений u_{i1} применить третий способ (стр. 288).

2. $\varphi(t)=\psi(t)=0$, $\Phi(x)=0$, функция $f(x)$ задана таблицей

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x)$	0	0,0145	0,0511	$0{,}0921a$	0,1114	$0{,}1825/a$	0,1902	$0{,}1481a$	0,1028	0,0502	0

$a=0{,}95+0{,}025\cdot n$, $n=1, 2, 3, 4$.

3. $\varphi(t)=0$, $\psi(t)=f(1)$, функции $\Phi(x)$, $f(x)$ заданы таблицей $a=1{,}1; 1{,}2; \ldots; 1{,}5$.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	0	0,1101	$0{,}1345\cdot a$	0,1498	0,1531	$0{,}1998\cdot a$
$\Phi(x)$	0	0,0420	0,0500	$0{,}0510\cdot a$	0,0440	0,0380

x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x)$	0,1402	0,1722	$0{,}1438\cdot a$	0,1241	0,1200
$\Phi(x)$	0,0220	$0{,}0210\cdot a$	0,0200	0,0190	0

4. Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x+t$$

с шагом $h=l=0{,}1$, если $f(x)=(1{,}5x^2+1{,}2)\sin\pi x$, $\Phi(x)=0{,}1x$, $\varphi(t)=\psi(t)=0$. Для вычисления значений u_{i1} использовать первый способ (стр. 288).

5. Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x^2-t^2$$

с шагом $h=l=0,1$, если $f(x)=(1,5x^2+0,9)\,e^{-x}$, $\Phi(x)=0$, $\varphi(t)=0$, $\psi(t)=2,4e^{-1}$. Для вычисления значений u_{i1} использовать первый способ.

§ 8. Решение уравнений Фредгольма методом конечных сумм

Мы рассмотрим здесь интегральные уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,\ s)\,y(s)\,ds=f(x) \tag{8.1}$$

и второго рода

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\,y(s)\,ds=f(x). \tag{8.2}$$

Идея метода конечных сумм (см. [2], [13], [17]) заключается в замене определенного интеграла конечной суммой с помощью одной из квадратурных формул

$$\int_a^b F(x)\,dx\approx\sum_{j=1}^{n}A_jF(x_j), \tag{8.3}$$

где x_j — абсциссы точек отрезка $[a,\ b]$, $A_j\,(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — коэффициенты квадратурной формулы, не зависящие от $F(x)$. Заменяя приближенно интеграл в уравнениях Фредгольма (8.1), (8.2) по формуле (8.3) и полагая $x=x_i$, будем иметь соответственно

$$\sum_{j=1}^{n}A_jK_{ij}y_j=f_i \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{8.4}$$

$$y_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}A_jK_{ij}y_j=f_i \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{8.5}$$

где $y_i=y(x_i)$, $K_{ij}=K(x_i,\ x_j)$, $f_i=f(x_i)$.

Получаем системы линейных алгебраических уравнений относительно значений y_i. Решив эти системы одним из известных методов (Гаусса, итераций), мы получим таблицу приближенных значений y_i в точках x_i. Это позволит записать приближенное решение уравнения (8.1) в виде интерполяционного многочлена, а приближенное решение уравнения (8.2) — в виде

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{j=1}^{n}A_jK(x,\ x_j)\,y_j. \tag{8.6}$$

В зависимости от выбора квадратурной формулы (8.3) будем иметь следующие значения коэффициентов A_j и абсцисс x_j:

1) для *формулы трапеций*

$$h=\frac{b-a}{n},\quad A_0=A_n=\frac{h}{2},\quad A_j=h\quad (j=1,2,\ldots,n-1),$$
$$x_j=a+jh\quad (j=0,1,\ldots,n),$$

2) для *формулы Симпсона*

$$n=2m,\quad h=\frac{b-a}{2m},\quad A_0=A_{2m}=\frac{h}{3},\quad A_1=A_3=\ldots=A_{2m-1}=\frac{4h}{3},$$
$$A_2=A_4=\ldots=A_{2m-2}=\frac{2h}{3},\quad x_j=a+jh\quad (j=0,1,\ldots,2m),$$

3) для *формулы Гаусса*

$$A_j=(b-a)A_j^{(n)},\quad x_j=a+(b-a)x_j^{(n)},$$

где $x_j^{(n)}$ — абсциссы Гаусса, $A_j^{(n)}$ — коэффициенты Гаусса для интервала $(0, 1)$.

Погрешность приближенного решения зависит от погрешности выбранной квадратурной формулы. О выборе квадратурных формул см. [17]. Оценка погрешности метода приводится в [2], [17].

Пример 8.1. Используя квадратурную формулу Симпсона при $n=2$, найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x)+\int_0^1 xe^{xs}y(s)\,ds=e^x. \tag{8.7}$$

Решение. Для формулы Симпсона имеем

$$h=\frac{1}{2m}=\frac{1}{2},\quad A_0=A_2=\frac{1}{6},\quad A_1=\frac{2}{3},\quad x_0=0,\quad x_1=0{,}5,\quad x_2=1,$$

следовательно, для уравнения (8.7) можем написать

$$y(x)+\frac{1}{6}\left[xe^{0\cdot x}y_0+4xe^{0,5\cdot x}y_1+xe^{1\cdot x}y_2\right]=e^x.$$

Полагая в последнем равенстве $x=x_i$, получаем систему

$$\begin{aligned}&y_0=1,\\&y_1+\frac{0{,}5}{6}(y_0+4e^{0,25}y_1+e^{0,5}y_2)=e^{0,5},\\&y_2+\frac{1}{6}(y_0+4e^{0,5}y_1+e^1y_2)=e^1,\end{aligned}$$

которая после упрощений принимает вид

$$\begin{aligned}&y_0=1,\\&1{,}4280y_1+0{,}1374y_2=1{,}5654,\\&1{,}0991y_1+1{,}4530y_2=2{,}5516.\end{aligned}$$

Решив эту систему, получаем $y_0=1$, $y_1=1{,}0002$, $y_2=0{,}9995$. Для сравнения заметим, что точным решением уравнения (8.7) является функция $y(x)\equiv 1$.

Используя формулу (8.6), записываем приближенное решение уравнения (8.7) в виде

$$y(x)=e^x-\frac{x}{6}(1+4{,}001e^{x/2}+1{,}000e^x).$$

Пример 8.2. Применяя квадратурную формулу Гаусса при $n=2$, найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{xs}y(s)\,ds=1-\frac{1}{2x}(e^x-1). \tag{8.8}$$

Решение. Для формулы Гаусса имеем

$$A_1=A_2=\frac{1}{2},\qquad x_1=0{,}2113,\qquad x_2=0{,}7887.$$

Заменяя уравнение (8.8) системой (8.5), получаем

$$y_1-\frac{1}{4}(e^{x_1^2}y_1+e^{x_1x_2}y_2)=1-\frac{1}{2x_1}(e^{x_1}-1),$$
$$y_2-\frac{1}{4}(e^{x_1x_2}y_1+e^{x_2^2}y_2)=1-\frac{1}{2x_2}(e^{x_2}-1).$$

Подставляя значения x_1 и x_2, после преобразований приходим к системе

$$0{,}7386y_1-0{,}2954y_2=0{,}4434,\qquad -0{,}2954y_1+0{,}5343y_2=0{,}2384.$$

Решив эту систему, получаем $y_1=0{,}9997$, $y_2=0{,}9990$. Для сравнения заметим, что точным решением данного уравнения является функция $y(x)\equiv 1$. Таким образом, приближенное решение уравнения (8.8) можем записать в виде

$$y(x)=0{,}2499e^{0{,}2113x}+0{,}2497e^{0{,}7887x}+1-\frac{1}{2x}(e^x-1).$$

Пример 8.3. Применяя формулу прямоугольников при $n=12$, найти приближенное решение уравнения

$$y(x)+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)\,ds}{6{,}8-3{,}2\cos(x+s)}=25-16\sin^2 x. \tag{8.9}$$

Решение. Для формулы прямоугольников при $n=12$ будем иметь $h=2\pi/12=\pi/6$, $A_j=\pi/6$. Таким образом, получаем для уравнения (8.9)

$$y_i+\frac{\pi}{6}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}y_j=25-16\sin^2 x_i. \tag{8.10}$$

Значения K_{ij} даны в табл. 8.1.

Число неизвестных в полученной системе можно значительно сократить, если учесть симметрию искомого решения. Можно показать, что если функция $y(x)$ есть решение уравнения (8.9), то функция $y(-x)$ также является решением этого уравнения. Поэтому в силу единственности решения интегрального уравнения имеем $y(-x)=y(x)$, т. е. решение $y(x)$ — четная функция. Обозначим

$$I(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)\,ds}{6{,}8-3{,}2\cos(x+s)}$$

и покажем, что

$$I(x)=I(-x)=I(\pi-x). \tag{8.11}$$

Действительно,

$$I(-x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)\,ds}{6{,}8-3{,}2\cos(-x+s)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)\,ds}{6{,}8-3{,}2\cos(x-s)}.$$

Произведя замену переменных $-s=t$ и учитывая четность функции $y(x)$, будем иметь

$$I(-x)=-\int_{\pi}^{-\pi}\frac{y(-t)\,dt}{6{,}8-3{,}2\cos(x+t)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(t)\,dt}{6{,}8-3{,}2\cos(x+t)}=I(x).$$

Далее,

$$I(\pi-x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)\,ds}{6{,}8-3{,}2\cos(\pi-x+s)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)\,ds}{6{,}8-3{,}2\cos(x-(\pi+s))},$$

откуда с помощью подстановки $\pi+s=-t$ получаем

$$I(\pi-x)=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(t)\,dt}{6{,}8-3{,}2\cos(x+t)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(t)\,dt}{6{,}8-3{,}2\cos(x+t)}=I(x).$$

Из (8.11) следует

$$y(x)=y(-x)=y(\pi-x),$$

т. е. график искомого решения симметричен относительно прямых

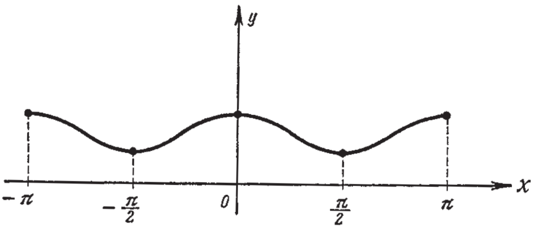

Рис. 21.

$x=0$, $x=\pm\pi/2$ (рис. 21); учитывая симметрию, можем написать

$$\left.\begin{aligned}
&y(-\pi)=y(0)=y(\pi),\quad y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=y\left(\frac{\pi}{2}\right),\\
&y\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=y\left(-\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{5}{6}\pi\right),\\
&y\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=y\left(\frac{\pi}{3}\right)=y\left(\frac{2}{3}\pi\right).
\end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

Обозначая $y_1 = y(0)$, $y_2 = y(\pi/6)$, $y_3 = y(\pi/3)$, $y_4 = y(\pi/2)$ и учитывая условия (8.12), перепишем систему (8.10) в виде

$$
\begin{aligned}
y_1 + \frac{\pi}{6}\Big[& y_1 (K(0,\ -\pi) + K(0,\ 0)) + y_2 \left(K\left(0,\ -\frac{5}{6}\pi\right) + \right. \\
& + K\left(0,\ -\frac{\pi}{6}\right) + K\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right) + K\left(0,\ \frac{5}{6}\pi\right)\Big) + y_3 \left(K\left(0,\ -\frac{2}{3}\pi\right) + \right. \\
& + K\left(0, -\frac{\pi}{3}\right) + K\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right) + K\left(0,\ \frac{2}{3}\pi\right)\Big) + y_4 \left(K\left(0, -\frac{\pi}{2}\right) + \right. \\
& \left. \left. + K\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = 25,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 + \frac{\pi}{6}\Big[& y_1 \left(K\left(\frac{\pi}{6},\ -\pi\right) + K\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)\right) + y_2 \left(K\left(\frac{\pi}{6},\ -\frac{5}{6}\pi\right) + \right. \\
& + K\left(\frac{\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6}\right) + K\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right) + K\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right)\Big) + y_3 \left(K\left(\frac{\pi}{6},\ -\frac{2}{3}\pi\right) + \right. \\
& + K\left(\frac{\pi}{6},\ -\frac{\pi}{3}\right) + K\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right) + K\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi\right)\Big) + y_4 \left(K\left(\frac{\pi}{6},\ -\frac{\pi}{2}\right) + \right. \\
& \left. \left. + K\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = 21,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_3 + \frac{\pi}{6}\Big[& y_1 \left(K\left(\frac{\pi}{3},\ -\pi\right) + K\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)\right) + y_2 \left(K\left(\frac{\pi}{3},\ -\frac{5}{6}\pi\right) + \right. \\
& + K\left(\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{6}\right) + K\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{6}\right) + K\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi\right)\Big) + y_3 \left(K\left(\frac{\pi}{3},\ -\frac{2}{3}\pi\right) + \right. \\
& + K\left(\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3}\right) + K\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right) + K\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi\right)\Big) + y_4 \left(K\left(\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{2}\right) + \right. \\
& \left. \left. + K\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = 13,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_4 + \frac{\pi}{6}\Big[& y_1 \left(K\left(\frac{\pi}{2},\ -\pi\right) + K\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)\right) + y_2 \left(K\left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{5}{6}\pi\right) + \right. \\
& + K\left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{6}\right) + K\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6}\right) + K\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi\right)\Big) + y_3 \left(K\left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{2}{3}\pi\right) + \right. \\
& + K\left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}\right) + K\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3}\right) + K\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi\right)\Big) + y_4 \left(K\left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\right) + \right. \\
& \left. \left. + K\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = 9,
\end{aligned}
$$

где значения $K(x_i,\ x_j) = K_{ij}$ даны в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Значения K_{ij} для уравнения (8.9)

x_i \ x_j	$-\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
0	0,100	0,105	0,119	0,147	0,192	0,247	0,278	0,247	0,192	0,147	0,119	0,105
$\frac{\pi}{6}$	0,105	0,119	0,147	0,192	0,247	0,278	0,247	0,192	0,147	0,119	0,105	0,100
$\frac{\pi}{3}$	0,119	0,147	0,192	0,247	0,278	0,247	0,192	0,147	0,119	0,105	0,100	0,105
$\frac{\pi}{2}$	0,147	0,192	0,247	0,278	0,247	0,192	0,147	0,119	0,105	0,100	0,105	0,119

Подставляя значения K_{ij} и вычисляя коэффициенты при y_i $(i=1, 2, 3, 4)$, получаем систему

$$\begin{aligned}
1{,}19y_1+0{,}35y_2+0{,}31y_3+0{,}15y_4&=25,\\
0{,}18y_1+1{,}34y_2+0{,}32y_3+0{,}16y_4&=21,\\
0{,}16y_1+0{,}32y_2+1{,}34y_3+0{,}18y_4&=13,\\
0{,}15y_1+0{,}31y_2+0{,}35y_3+1{,}19y_4&=9,
\end{aligned}$$

из которой находим

$$y_1=16{,}04, \quad y_2=12{,}27, \quad y_3=4{,}73, \quad y_4=0{,}953.$$

Используя условия (8.12), можем получить значения y_i и в остальных точках, а в качестве приближенного решения уравнения (8.9) записать

$$y(x)=\frac{\pi}{6}\sum_{j=1}^{12}\frac{y_j}{6{,}8-3{,}2\cos(x+x_j)}.$$

Для сравнения приведем значения точного решения

$$\tilde{y}(x)=8{,}50+7{,}53\cos 2x$$

в соответствующих точках:

$$\tilde{y}(0)=16{,}030, \quad \tilde{y}\left(\frac{\pi}{6}\right)=12{,}265, \quad \tilde{y}\left(\frac{\pi}{3}\right)=4{,}735, \quad \tilde{y}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0{,}970.$$

ЗАДАЧИ

Применяя указанные квадратурные формулы, найти приближенные решения следующих интегральных уравнений.

1. $y(x)+\int\limits_0^1 \frac{y(s)}{1+x^2+s^2}\,ds=1{,}5-x^2$ (формула трапеций при $n=4$).

2. $y(x)+\int\limits_0^{0{,}5} \frac{(1+s)\,y(s)}{2+\sin\pi(x+s)}\,ds=1+\sin\pi x$ (формула трапеций при $n=5$).

3. $y(x)-\int\limits_0^{0{,}96} \frac{(1+x+s)\,y(s)}{2+x^2+s^2}\,ds=e^{-x}$ (формула Симпсона при $n=4$).

4. $y(x)-\int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}\,y(s)\,ds=1-x^2$ (формула Гаусса при $n=4$).

§ 9. Решение уравнения Вольтерра второго рода методом конечных сумм

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x)-\lambda\int\limits_a^x K(x, s)\,y(s)\,ds=f(x). \tag{9.1}$$

Известно (см. [30], [38]), что если ядро $K(x, s)$ есть непрерывная функция в области $R\{a \leqslant s \leqslant x \leqslant b\}$, а $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интегральное уравнение (9.1) имеет единственное решение при любом λ. Выберем одну из квадратурных формул Ньютона — Котеса

$$\int_a^b F(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j F(x_j), \tag{9.2}$$

где x_j — абсциссы точек отрезка $[a, b]$, а A_j — коэффициенты квадратурной формулы ($j=0, 1, \ldots, n$). Полагая в (9.1) $x=x_i$ и заменяя затем приближенно определенные интегралы конечными суммами, будем иметь

$$y_i - \lambda \sum_{j=0}^{i} A_j^{(i)} K_{ij} y_j = f_i \qquad (i=0, 1, \ldots, n), \tag{9.3}$$

где $y_i = y(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f_i = f(x_i)$.

Получаем линейную систему с треугольной матрицей. Последнее обстоятельство существенно облегчает ее решение. Значения коэффициентов A_j зависят от выбора квадратурной формулы (см. § 8).

Пример 9.1. Применяя формулу трапеций с шагом $h=0{,}2$ на отрезке $[0, 1]$, найти приближенное решение уравнения

$$y(x) - \int_0^x e^{-x-s} y(s)\,ds = 0{,}5\,(e^{-x} + e^{-3x}). \tag{9.4}$$

Решение. Для формулы трапеций при $n=5$ имеем

$$A_0 = A_5 = h/2, \quad A_j = h \qquad (j=1, 2, 3, 4).$$

Полагая в уравнении (9.4) $x=x_i$ ($i=0, 1, \ldots, 5$), получим

$$y_0 = f_0,$$

$$y_i - \int_0^{x_i} e^{-x_i-s} y(s)\,ds = 0{,}5\,(e^{-x_i} + e^{-3x_i}) \qquad (i=1, 2, \ldots, 5).$$

Применяя к определенным интегралам формулу трапеций с шагом $h=0{,}2$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&y_0 = f_0,\\
&y_1 - \frac{h}{2}(K_{10}y_0 + K_{11}y_1) = f_1,\\
&y_2 - \frac{h}{2}(K_{20}y_0 + 2K_{21}y_1 + K_{22}y_2) = f_2,\\
&y_3 - \frac{h}{2}[K_{30}y_0 + 2(K_{31}y_1 + K_{32}y_2) + K_{33}y_3] = f_3,\\
&y_4 - \frac{h}{2}[K_{40}y_0 + 2(K_{41}y_1 + K_{42}y_2 + K_{43}y_3) + K_{44}y_4] = f_4,\\
&y_5 - \frac{h}{2}[K_{50}y_0 + 2(K_{51}y_1 + K_{52}y_2 + K_{53}y_3 + K_{54}y_4) + K_{55}y_5] = f_5.
\end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

Составляем таблицу значений $K(x, s)=e^{-x-s}$, $f(x)=0,5(e^{-x}+e^{-3x})$ (табл. 9.1) и из системы (9.5) последовательно находим

$$y_0=f_0=1,0000\ ,$$

$$y_1=\left[f_1+\frac{h}{2}K_{10}y_0\right]\left(1-\frac{h}{2}K_{11}\right)^{-1}=0,8206,$$

$$y_2=\left[f_2+\frac{h}{2}K_{20}y_0+hK_{21}y_1\right]\left(1-\frac{h}{2}K_{22}\right)^{-1}=0,6731,$$

$$y_3=\left[f_3+\frac{h}{2}K_{30}y_0+h(K_{31}y_1+K_{32}y_2)\right]\left(1-\frac{h}{2}K_{33}\right)^{-1}=0,5518,$$

$$y_4=\left[f_4+\frac{h}{2}K_{40}y_0+h(K_{41}y_1+K_{42}y_2+K_{43}y_3)\right]\left(1-\frac{h}{2}K_{44}\right)^{-1}=0,4522,$$

$$y_5=\left[f_5+\frac{h}{2}K_{50}y_0+h(K_{51}y_1+K_{52}y_2+K_{53}y_3+K_{54}y_4)\right]\left(1-\frac{h}{2}K_{55}\right)^{-1}=$$
$$=0,3705.$$

Таблица 9.1

Значения K_{ij}, f_i

i	K_{0i}	K_{1i}	K_{2i}	K_{3i}	K_{4i}	K_{5i}	f_i
0	1,00000	0,81873	0,67032	0,54881	0,44933	0,36788	1,00000
1	0,81873	0,67032	0,54881	0,44933	0,36788	0,30119	0,68377
2	0,67032	0,54881	0,44933	0,36788	0,30119	0,24660	0,48576
3	0,54881	0,44933	0,36788	0,30119	0,24660	0,20190	0,35706
4	0,44933	0,36788	0,30119	0,24660	0,20190	0,16530	0,27002
5	0,36788	0,30119	0,24660	0,20190	0,16530	0,13534	0,20883

ЗАДАЧИ

Применяя формулу трапеций с шагом $h=0,2$, найти приближенные решения следующих интегральных уравнений.

1. $y(x)-0,5\int\limits_0^x \frac{y(s)}{2+\sin\pi(x+s)}ds=2-\sin\pi x$ на отрезке $[0,\ 1]$.

2. $y(x)-\int\limits_0^x \frac{y(s)}{(1+x+y)}ds=(1+x)$ на отрезке $[0, 1]$.

3. $y(x)-\int\limits_0^x \frac{y(s)}{1+e^{-xs}}ds=\operatorname{ch}x$ на отрезке $[0;\ 1,2]$.

§ 10. Метод замены ядра на вырожденное

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\,y(s)\,ds=f(x). \tag{10.1}$$

Ядро $K(x, s)$ называется *вырожденным*, если оно представимо в виде

$$K(x, s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\,\beta_i(s), \tag{10.2}$$

где функции $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(s)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$.

Предлагаемый метод (см. [2], [13], [17]) основан на том, что для интегрального уравнения (10.1) с вырожденным ядром может быть получено точное решение. Заменим приближенно ядро $K(x, s)$ вырожденным

$$K(x, s)\approx\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\,\beta_i(s) \tag{10.3}$$

и будем искать приближенное решение уравнения (10.1) в виде

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i(x), \tag{10.4}$$

где

$$c_i=\int_a^b\beta_i(s)\,y(s)\,ds. \tag{10.5}$$

Подставляя выражение (10.4) в (10.5), получим

$$c_i=\int_a^b\beta_i(s)f(s)\,ds+\lambda\int_a^b\beta_i(s)\sum_{j=1}^{n}c_j\alpha_j(s)\,ds \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Вводя обозначения

$$f_i=\int_a^b\beta_i(s)\,f(s)\,ds, \qquad A_{ij}=\int_a^b\alpha_j(s)\,\beta_i(s)\,ds, \tag{10.6}$$

будем иметь

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}c_jA_{ij}=f_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{10.7}$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно c_i. Решив эту систему, записываем приближенное решение уравнения (10.1) в виде (10.4). В качестве вырожденного ядра можно взять отрезок ряда Тейлора или ряда Фурье для функции $K(x, s)$. Более подробно вопрос о подборе вырожденного ядра, а также об оценке погрешности метода рассматривается в [2], [17].

Пример 10.1. Найти приближенное решение уравнения

$$y(x)-\int_0^1 \operatorname{sh}(xs)\,y(s)\,ds=1-x^2. \qquad (10.8)$$

Решение. Заменяем ядро $K(x, s)=\operatorname{sh}(x, s)$ суммой первых трех членов ряда Тейлора:

$$\operatorname{sh}(xs)\approx xs+\frac{(xs)^3}{3!}+\frac{(xs)^5}{5!}.$$

Тогда решение уравнения (10.8) будем искать в виде

$$y(x)=1-x^2+c_1x+c_2x^3+c_3x^5.$$

Обозначив $f(x)=1-x^2$, $\alpha_1=x$, $\alpha_2=x^3$, $\alpha_3=x^5$, $\beta_1(s)=s$, $\beta_2(s)=\frac{s^3}{3!}$, $\beta_3(s)=\frac{s^5}{5!}$, находим по формулам (10.6) коэффициенты системы (10.7):

$$f_1=\int_0^1 \beta_1(s)f(s)\,ds=\int_0^1(s-s^3)\,ds=\frac{1}{4},$$

$$f_2=\int_0^1 \beta_2(s)f(s)\,ds=\int_0^1\frac{1}{3!}(s^3-s^5)\,ds=\frac{1}{72},$$

$$f_3=\int_0^1 \beta_3(s)f(s)\,ds=\int_0^1\frac{1}{5!}(s^5-s^7)\,ds=\frac{1}{2880},$$

$$A_{11}=\int_0^1 s^2\,ds=\frac{1}{3},\quad A_{12}=\int_0^1 s^4\,ds=\frac{1}{5},\quad A_{13}=\int_0^1 s^4\,ds=\frac{1}{7},$$

$$A_{21}=\int_0^1\frac{1}{3!}s^4\,ds=\frac{1}{30},\quad A_{22}=\int_0^1\frac{1}{3!}s^6\,ds=\frac{1}{42},\quad A_{23}=\int_0^1\frac{s^8}{3!}\,ds=\frac{1}{54},$$

$$A_{31}=\int_0^1\frac{1}{5!}s^6\,ds=\frac{1}{840},\quad A_{32}=\int_0^1\frac{s^8}{5!}\,ds=\frac{1}{1080},\quad A_{33}=\int_0^1\frac{s^{10}}{5!}\,ds=\frac{1}{1320}.$$

Таким образом, имеем систему

$$c_1=\frac{1}{3}c_1+\frac{1}{5}c_2+\frac{1}{7}c_3+\frac{1}{4},$$

$$c_2=\frac{1}{30}c_1+\frac{1}{42}c_2+\frac{1}{54}c_3+\frac{1}{72},$$

$$c_3=\frac{1}{840}c_1+\frac{1}{1080}c_2+\frac{1}{1320}c_3+\frac{1}{2880}.$$

Решив ее методом итерации, получаем $c_1 = 0{,}3833$, $c_2 = 0{,}0273$, $c_3 = 0{,}0008$. Следовательно, приближенное решение уравнения (10.8) можно записать в виде

$$y(x) = 1 - x^2 + 0{,}3833x + 0{,}0273x^3 + 0{,}0008x^5.$$

ЗАДАЧИ

Найти приближенные решения интегральных уравнений, заменив ядро суммой первых трех членов ряда Тейлора.

1. $y(x) - \int\limits_0^1 \frac{\sin(axs)}{s} y(s)\,ds = f(x)$, $a = 0{,}6 + 0{,}2\cdot k$, $k = 0, 1, 2, 3$.

а) $f(x) = x$, б) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. $y(x) - \int\limits_0^1 (1+s)(e^{axs} - 1)\,y(s)\,ds = f(x)$, $a_1 = 0{,}2 + 0{,}1\cdot k$, $k = 0, 1, 2$, $a_2 = -0{,}4 + 0{,}1\cdot n$, $n = 0, 1, 2$.

а) $f(x) = \frac{1}{x}$, б) $f(x) = (1 - x)$, в) $f(x) = e^{-x}$.

3. $y(x) - \int\limits_0^1 \frac{xs}{\sqrt{1 + axs}} y(s)\,ds = f(x)$, $a_1 = 0{,}1$, $a_2 = 0{,}2$, $a_3 = -0{,}1$, $a_4 = -0{,}2$.

а) $f(x) = 1 + x$, б) $f(x) = e^{-x}$, в) $f(x) = \sqrt{x}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Некоторые часто встречающиеся постоянные

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$
π	3,1415 93	0,49715	$1:\pi$	0,3183 10	$\bar{1}$,50285
2π	6,2831 85	0,79818	$1:2\pi$	0,1591 55	$\bar{1}$,20182
3π	9,4247 78	0,97427	$1:3\pi$	0,1061 03	$\bar{1}$,02573
4π	12,5663 71	1,09921	$1:4\pi$	0,0795 77	$\bar{2}$,90079
$\pi:2$	1,5707 96	0,19612	$2:\pi$	0,6366 20	$\bar{1}$,80388
$\pi:3$	1,0471 98	0,02003	$3:\pi$	0,9549 30	$\bar{1}$,97997
$\pi:4$	0,7853 98	$\bar{1}$,89509	$4:\pi$	1,2732 40	0,10491
$\pi:6$	0,5235 99	$\bar{1}$,71900	$6:\pi$	1,9098 59	0,28100
$\pi:180\ (=1^\circ)$	0,0174 53	$\bar{2}$,24188	$180^\circ:\pi$	57°,2957 80	1,75812
$\pi:10\,800\ (=1')$	0,0002 91	$\bar{4}$,46373	$10\,800':\pi$	3437′,74 68	3,53627
$\pi:648\,000\ (=1'')$	0,0000 05	$\bar{6}$,68557	$648\,000'':\pi$	206264″, 81	5,31443
π^2	9,8696 04	0,99430	$1:\pi^2$	0,1013 21	$\bar{1}$,00570
$\sqrt{\pi}$	1,7724 54	0,24857	$\sqrt{1:\pi}$	0,5641 90	$\bar{1}$,75143
$\sqrt{2\pi}$	2,5066 28	0,39909	$\sqrt{1:2\pi}$	0,3989 42	$\bar{1}$,60091
$\sqrt{\pi:2}$	1,2533 14	0,09806	$\sqrt{2:\pi}$	0,7978 85	$\bar{1}$,90194
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645 92	0,16572	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,6827 84	$\bar{1}$,83428
$\sqrt{4\pi:3}$	1,6119 92	0,20736	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,6203 50	$\bar{1}$,79264
e	2,7182 82	0,43429	$1:e$	0,3678 79	$\bar{1}$,56571
e^2	7,3890 56	0,86859	$1:e^2$	0,1353 35	$\bar{1}$,13141
$\sqrt{e}$	1,6487 21	0,21715	$\sqrt{1:e}$	0,6065 31	$\bar{1}$,78285
$\sqrt[3]{e}$	1,3956 12	0,14476	$\sqrt[3]{1:e}$	0,7165 32	$\bar{1}$,85524
$e^{\pi:2}$	4,8104 77	0,68219	$e^{-\pi:2}$	0,2078 80	$\bar{1}$,31781
e^{π}	23,1406 93	1,36438	$e^{-\pi}$	0,0432 14	$\bar{2}$,63562
$e^{2\pi}$	535,4916 56	2,72875	$e^{-2\pi}$	0,0018 67	$\bar{3}$,27125
C *)	0,5772 16	$\bar{1}$,76134	$\ln \pi$	1,1447 30	0,05870
$M=\lg e$	0,4342 94	$\bar{1}$,63778	$1:M=\ln 10$	2,3025 85	0,36222
g **)	9,81	0,99167	$1:g$	0,10194	$\bar{1}$,00833
g^2	96,2361	1,98334	$1:2g$	0,050968	$\bar{2}$,70730
$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583	$\pi\sqrt{g}$	9,83976	0,99298
$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635	$\pi\sqrt{2g}$	13,91552	1,14350

* C — постоянная Эйлера.

** g — ускорение силы тяжести в *м/сек*²; здесь дано округленное значение g на уровне моря на широте 45—50°.

2. Таблица случайных чисел

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17	39 29 27 49 45
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02	00 82 29 16 65
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64	35 08 03 36 06
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97	04 43 62 76 59
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77	12 17 17 68 33
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85	11 19 92 91 70
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39	23 40 30 97 32
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47	18 62 38 85 79
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09	83 49 12 56 24
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44	35 27 38 84 35
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33	50 50 07 39 98
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01	52 77 56 78 51
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10	68 71 17 78 17
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93	29 60 91 10 62
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68	23 47 83 41 13
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86	40 21 81 65 44
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53	14 38 55 37 63
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37	96 28 60 26 55
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90	94 40 05 64 18
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22	54 38 21 45 98
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23	37 08 92 00 48
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40	42 05 08 23 41
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81	22 22 20 64 13
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39	28 70 72 58 15
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82	07 20 73 17 90
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93	42 58 26 05 27
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18	33 21 15 94 66
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92	92 92 74 59 73
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59	25 70 14 66 70
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63	05 52 28 25 62
04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35	65 33 71 24 72
00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91	23 28 72 95 29
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24	90 10 33 93 33
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92	78 56 52 01 06
46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47	70 61 74 29 41
32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57	85 39 41 18 38
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23	97 11 89 63 38
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06	84 96 28 52 07
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33	20 82 66 95 41
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56	05 01 45 11 76
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07	35 44 13 18 80
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94	37 54 87 30 43
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98	94 62 46 11 71
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39	00 38 75 95 79
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27	77 93 89 19 36
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21	80 81 45 17 48
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55	36 04 09 03 24
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40	88 46 12 33 56
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46	15 02 00 99 94
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15	01 84 87 69 38
09 18 82 00 97	32 82 53 95 27	04 22 08 63 04	83 38 98 73 74	64 27 85 80 44
90 04 58 54 97	51 98 15 06 54	94 93 88 19 97	91 87 07 61 50	68 47 66 46 59
73 18 95 02 07	47 67 72 62 69	62 29 06 44 64	27 12 46 70 18	41 36 18 27 60
75 76 87 64 90	20 97 18 17 49	90 42 91 22 72	95 37 50 58 71	93 82 34 31 78
54 01 64 40 56	66 28 13 10 03	00 68 22 73 98	20 71 45 32 95	07 70 61 78 13
08 35 86 99 10	78 54 24 27 85	13 66 15 88 73	04 61 89 75 53	31 22 30 84 20
28 30 60 32 64	81 33 31 05 91	40 51 00 78 93	32 60 46 04 75	94 11 90 18 40
53 84 08 62 33	81 59 41 36 28	51 21 59 02 90	28 46 66 87 95	77 76 22 07 91
91 75 75 37 41	61 61 36 22 69	50 26 39 02 12	55 78 17 65 14	83 48 34 70 55
89 41 59 26 94	00 39 75 83 91	12 60 71 76 46	48 94 97 23 06	94 54 13 74 08

77 51 30 38 20	86 83 42 99 01	68 41 48 27 74	51 90 81 39 80	72 89 35 55 07
19 50 23 71 74	69 97 92 02 88	55 21 02 97 73	74 28 77 52 51	65 34 46 74 15
21 81 85 93 13	93 27 88 17 57	05 68 67 31 56	07 08 28 50 46	31 85 33 84 52
51 47 46 64 99	68 10 72 36 21	94 04 99 13 45	42 83 60 91 91	08 00 74 54 49
99 55 96 83 31	62 53 52 41 70	69 77 71 28 30	74 81 97 81 42	43 86 07 28 34
33 71 34 80 07	93 58 47 28 69	51 92 66 47 21	58 30 32 98 22	93 17 49 39 72
85 27 48 68 93	11 30 32 92 70	28 83 43 41 37	73 51 59 04 00	71 14 84 36 43
84 13 38 96 40	44 03 55 21 66	73 85 27 00 91	61 22 26 05 61	62 32 71 84 23
56 73 21 62 34	17 39 59 61 31	10 12 39 16 22	85 49 65 75 60	81 60 41 88 80
65 13 85 68 06	87 64 88 52 61	34 31 36 58 61	45 87 52 10 69	85 64 44 72 77
38 00 10 21 76	81 71 91 17 11	71 60 29 29 37	74 21 96 40 49	65 58 44 96 98
37 40 29 63 97	01 30 47 75 86	56 27 11 00 86	47 32 46 26 05	40 03 03 74 38
97 12 54 03 48	87 08 33 14 17	21 81 53 92 50	75 23 76 20 47	15 50 12 95 78
21 82 64 11 34	47 14 33 40 72	64 63 88 59 02	49 13 90 64 41	03 85 65 45 52
73 13 54 27 42	95 71 90 90 35	85 79 47 42 96	08 78 98 81 56	64 69 11 92 02
07 63 87 79 29	03 06 11 80 72	96 20 74 41 56	23 82 19 95 38	04 71 36 69 94
60 52 88 34 41	07 95 41 98 14	59 17 52 06 95	05 53 35 21 39	61 21 20 64 55
83 59 63 56 55	06 95 89 29 83	05 12 80 97 19	77 43 35 37 83	92 30 15 04 98
10 85 06 27 46	99 59 91 05 07	13 49 90 63 19	53 07 57 18 39	06 41 01 93 62
39 82 09 89 52	43 62 26 31 47	64 42 18 08 14	43 80 00 93 51	31 02 47 31 67
59 58 00 64 78	75 56 97 88 00	88 83 55 44 86	23 76 80 61 56	04 11 10 84 08
38 50 80 73 41	23 79 34 87 63	90 82 29 70 22	17 71 90 42 07	95 95 44 99 53
30 69 27 06 68	94 68 81 61 27	56 19 68 00 91	82 06 76 34 00	05 46 26 92 00
65 44 39 56 59	18 28 82 74 37	49 63 22 40 41	08 33 76 56 76	96 29 99 08 36
27 26 76 02 64	13 19 27 22 94	07 47 74 46 06	17 98 54 89 11	97 34 13 03 58
91 30 70 69 91	19 07 22 42 10	36 69 95 37 28	28 82 53 57 93	28 97 66 62 52
68 43 49 46 88	84 47 31 36 22	62 12 69 84 08	12 84 38 25 90	09 81 59 31 46
48 90 81 58 77	54 74 52 45 91	35 70 00 47 54	83 82 45 26 92	54 13 05 51 60
06 91 34 51 97	42 67 27 86 01	11 88 30 95 28	63 01 19 89 01	14 97 44 03 44
10 45 51 60 19	14 21 03 37 12	91 34 23 78 21	88 32 58 08 51	43 66 77 08 83
12 88 39 73 43	65 02 76 11 84	04 28 50 13 92	17 97 41 50 77	90 71 22 67 69
21 77 83 09 76	38 80 73 69 61	31 64 94 20 96	63 28 10 20 23	08 81 64 74 49
19 52 35 95 15	65 12 25 96 59	86 28 36 82 58	69 57 21 37 98	16 43 59 15 29
67 24 55 26 70	35 58 31 65 63	79 24 68 66 86	76 46 33 42 22	26 65 59 08 02
60 58 44 73 77	07 50 03 79 92	45 13 42 65 29	26 76 08 36 37	41 32 64 43 44
53 85 34 13 77	36 06 69 48 50	58 83 87 38 59	49 36 47 33 31	96 24 04 36 42
24 63 73 87 36	74 38 48 93 42	52 62 30 79 92	12 36 91 86 01	03 74 28 38 73
83 08 01 24 51	38 99 22 28 15	07 75 95 17 77	97 37 72 75 85	51 97 23 78 67
16 44 42 43 34	36 15 19 90 73	27 49 37 09 39	85 13 03 25 52	54 84 65 47 59
60 79 01 81 57	57 17 86 57 62	11 16 17 85 76	45 81 95 29 79	65 13 00 48 60

ОТВЕТЫ

Глава I

§ 1

1. а) $a=2{,}15$, $\Delta=0{,}14\cdot10^{-2}$, $\delta=0{,}65\cdot10^{-3}$, б) $a=0{,}162$, $\Delta=0{,}48\cdot10^{-3}$, $\delta=0{,}3\cdot10^{-2}$, в) $a=0{,}0120$, $\Delta=0{,}4\cdot10^{-4}$, $\delta=0{,}33\cdot10^{-2}$, г) $a=1{,}23$, $\Delta=0{,}5\cdot10^{-2}$, $\delta=0{,}41\cdot10^{-2}$, д) $a=-0{,}00153$, $\Delta=0{,}19\cdot10^{-5}$, $\delta=0{,}12\cdot10^{-2}$, е) $a=-393$, $\Delta=0{,}15$, $\delta=0{,}38\cdot10^{-3}$, ж) $a=0{,}155$, $\Delta=0{,}5\cdot10^{-3}$, $\delta=0{,}32\cdot10^{-2}$, з) $a=0{,}00392$, $\Delta=0{,}2\cdot10^{-5}$, $\delta=0{,}51\cdot10^{-3}$, и) $a=626$, $\Delta=0{,}45$, $\delta=0{,}72\cdot10^{-3}$, к) $a=94{,}5$, $\Delta=0{,}25\cdot10^{-1}$, $\delta=0{,}26\cdot10^{-3}$.

2. а) $\Delta=0{,}13\cdot10^{2}$, б) $\Delta=0{,}16\cdot10^{-1}$, в) $\Delta=0{,}36$, г) $\Delta=0{,}9\cdot10^{-1}$, д) $=0{,}23\cdot10$.

3. $\delta_{\alpha_1}=0{,}13\cdot10^{-4}$, $\delta_{\alpha_2}=0{,}62\cdot10^{-5}$, $\delta_{\alpha_3}=0{,}28\cdot10^{-3}$, $\delta_{\alpha_4}=0{,}37\cdot10^{-5}$.

4. а) 2, б) 3, в) 4, г) 3, д) 2, е) 5, ж) 1, з) 2, и) 4, к) 2.

5. а) 3, б) 2, в) 1, г) 2, д) 1, е) 3, ж) 1, з) 2, и) 1, к) 2.

§ 2

1. а) 399, $\Delta=0{,}9$, $\delta=0{,}23\%$, б) 205,0, $\Delta=0{,}07$, $\delta=0{,}034\%$, в) 326,6, $\Delta=0{,}09$, $\delta=0{,}028\%$, г) 19,5, $\Delta=0{,}6$, $\delta=3\%$.

§ 3

1. а) 30, $\delta=0{,}72\%$, $\Delta=0{,}2$, б) 43,7, $\delta=0{,}23\%$, $\Delta=0{,}1$, в) 0,3, $\delta=28\%$, $\Delta=0{,}1$, г) $138\cdot10^{2}$, $\delta=0{,}34\%$, $\Delta=0{,}48\cdot10^{2}$, д) 19, $\delta=0{,}87\%$, $\Delta=0{,}22$, е) $18\cdot10^{3}$, $\delta=0{,}96\%$, $\Delta=0{,}18\cdot10^{3}$.

2. а) 1,130, $\delta=0{,}019\%$, $\Delta=0{,}2\cdot10^{-3}$, б) 0,12, $\delta=4{,}6\%$, $\Delta=0{,}55\cdot10^{-2}$, в) 54, $\delta=13\%$, $\Delta=7$, г) 0,877, $\delta=0{,}06\%$, $\Delta=0{,}53\cdot10^{-3}$, д) 20,7, $\delta=0{,}14\%$, $\Delta=0{,}29\cdot10^{-1}$, е) 0,0016, $\delta=0{,}7\%$, $\Delta=0{,}11\cdot10^{-4}$.

3. 19,9 $м^2$ с абсолютной погрешностью 0,1 $м^2$.

4. 0,4800 с абсолютной погрешностью 0,00044.

5. $\Delta=12\pi$ $см^2=38$ $см^2$, $\delta=8{,}3\%$.

6. $\Delta=3{,}84$ $см^3$, $\delta=0{,}75\%$. **7.** $\delta=1{,}5\%$.

§ 4

1. $y=\sin x$, а) $\Delta_y=0{,}28\cdot10^{-3}$, $\delta_y=0{,}13\cdot10^{-2}$, $\sin x=0{,}196$, б) $\Delta_y=0{,}16\cdot10^{-4}$, $\delta_y=0{,}21\cdot10^{-4}$, $\sin x=0{,}7513$, в) $\Delta_y=0{,}2\cdot10^{-3}$, $\delta_y=0{,}29\cdot10^{-3}$, $\sin x=0,\ 707$, г) $\Delta_y=0{,}56\cdot10^{-3}$, $\delta_y=0{,}72\cdot10^{-3}$, $\sin x=0{,}768$, д) $\Delta_y=0{,}45\cdot10^{-2}$, $\delta_y=0{,}9\cdot10^{-2}$, $\sin x=0{,}43$, е) $\Delta_y=0{,}44\cdot10^{-4}$, $\delta_y=0{,}22\cdot10^{-4}$, $\sin x=0{,}8979$.

$y=\cos x$. а) $\Delta_y=0{,}57\cdot10^{-4}$, $\delta_y=0{,}11\cdot10^{-4}$, $\cos x=0{,}9805$, б) $\Delta_y=0{,}18\cdot10^{-4}$, $\delta_y=0{,}2\cdot10^{-4}$, $\cos x=0{,}6600$, в) $\Delta_y=0{,}2\cdot10^{-3}$, $\delta_y=0{,}29\cdot10^{-3}$, $\cos x=0{,}707$, г) $\Delta_y=0{,}67\cdot10^{-3}$, $\delta_y=0{,}8\cdot10^{-3}$, $\cos x=0{,}64$, д) $\Delta_y=0{,}21\cdot10^{-2}$, $\delta_y=0{,}1\cdot10^{-2}$, $\cos x=0{,}90$, е) $\Delta_y=0{,}9\cdot10^{-4}$, $\delta_y=0{,}18\cdot10^{-3}$, $\cos x=0{,}4402$.

$y = \operatorname{tg} x$. а) $\Delta_y = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$, $\delta_y = 0{,}15 \cdot 10^{-2}$, $\operatorname{tg} x = 0{,}2004$, б) $\Delta_y = 0{,}55 \cdot 10^{-4}$, $\delta_y = 0{,}48 \cdot 10^{-4}$, $\operatorname{tg} x = 1{,}1383$, в) $\Delta_y = 0{,}58 \cdot 10^{-3}$, $\delta_y = 0{,}12 \cdot 10^{-2}$, $\operatorname{tg} x = 1{,}0$, г) $\Delta_y = 0{,}21 \cdot 10^{-2}$, $\delta_y = 0{,}43 \cdot 10^{-2}$, $\operatorname{tg} x = 1{,}20$, д) $\Delta_y = 0{,}62 \cdot 10^{-2}$, $\delta_y = 0{,}16 \cdot 10^{-1}$, $\operatorname{tg} x = 0{,}48$, е) $\Delta_y = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$, $\delta_y = 0{,}12 \cdot 10^{-2}$, $\operatorname{tg} x = 2{,}040$.

2. а) $y = 8{,}379$, $\Delta_y = 0{,}19 \cdot 10^{-2}$, $\delta_y = 0{,}23 \cdot 10^{-3}$, б) $y = 3{,}598$, $\Delta_y = 0{,}11 \cdot 10^{-2}$, $\delta_y = 0{,}31 \cdot 10^{-3}$, в) $y = 0{,}1046$, $\Delta_y = 0{,}37 \cdot 10^{-3}$, $\delta_y = 0{,}36 \cdot 10^{-3}$.

3. а) $u = 0{,}81$, $\Delta_u = 0{,}27 \cdot 10^{-2}$, $\delta_u = 0{,}33 \cdot 10^{-2}$, б) $u = 3{,}66$, $\Delta_u = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$, $\delta_u = 0{,}27 \cdot 10^{-2}$, в) $u = 7{,}48$, $\Delta_u = 0{,}49 \cdot 10^{-2}$, $\delta_u = 0{,}64 \cdot 10^{-3}$.

4. $\delta = 0{,}12 \cdot 10^{-2} = 0{,}12\%$.

§ 5

1. а) 20″, б) 20″, в) 4′, г) $0{,}2 \cdot 10^{-1}$, д) $0{,}1 \cdot 10^{-2}$.

2. а) $0{,}50 \cdot 10^{-5}$, б) $0{,}52 \cdot 10^{-5}$, в) $0{,}68 \cdot 10^{-5}$, г) $0{,}78 \cdot 10^{-5}$, д) $0{,}12 \cdot 10^{-4}$, е) $0{,}96 \cdot 10^{-4}$,

3. а) $0{,}5 \cdot 10^{-2}$, б) $0{,}5 \cdot 10^{-3}$, в) $0{,}2 \cdot 10^{-4}$, г) $0{,}4 \cdot 10^{-4}$, д) $0{,}7 \cdot 10^{-1}$.

4. а) 6, б) 6, в) 5.

5. 4.

6. а) $\Delta_{x_1} = 0{,}56 \cdot 10^{-4}$, $\Delta_{x_2} = 0{,}25 \cdot 10^{-4}$, б) $\Delta_{x_1} = 0{,}28 \cdot 10^{-4}$, $\Delta_{x_2} = 0{,}15 \cdot 10^{-4}$, $\Delta_{x_3} = 0{,}77 \cdot 10^{-5}$, в) $\Delta_{x_1} = 0{,}90 \cdot 10^{-5}$, $\Delta_{x_2} = 0{,}85 \cdot 10^{-5}$, $\Delta_{x_3} = 0{,}62 \cdot 10^{-5}$.

7. $\delta_l = 0{,}2\%$, $\delta_s = 0{,}7\%$.

Глава II

§ 1.

2.

ξ	$P(\xi)$	ξ	$P(\xi)$
0,85	−2,1178	1,35	−14,0310
0,90	−2,7609	1,40	−16,0938
0,95	−3,4984	1,45	−18,3621
1,00	−4,3400	1,50	−20,8487
1,05	−5,2958	1,55	−23,5666
1,10	−6,3761	1,60	−26,5288
1,15	−7,5917	1,65	−29,7489
1,20	−8,9536	1,70	−33,2404
1,25	−10,4729	1,75	−37,0172
1,30	−12,1615	1,80	−41,0934
		1,85	−45,4832

§ 2

1.

д)

x	e^{x^2}
0,50	1,28402
0,52	1,31049
0,54	1,33857
0,56	1,36834
0,58	1,39990
0,60	1,43333
0,62	1,46873
0,64	1,50622
0,66	1,54589
0,68	1,58788
0,70	1,63232
0,72	1,67934
0,74	1,72910
0,76	1,78176
0,78	1,83749
0,80	1,89648

е)

x	e^{-x^2}
1,30	0,18452
1,31	0,17977
1,32	0,17510
1,33	0,17052
1,34	0,16603
1,35	0,16162
1,36	0,15730
1,37	0,15306
1,38	0,14891
1,39	0,14484
1,40	0,14086
1,41	0,13696
1,42	0,13313
1,43	0,12939
1,44	0,12573
1,45	0,12215

ж)

x	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/2}$
1,78	0,0579
1,81	0,0548
1,84	0,0519
1,87	0,0491
1,90	0,0464
1,93	0,0438
1,96	0,0413
1,99	0,0389
2,02	0,0367
2,05	0,0345
2,08	0,0324
2,11	0,0304
2,14	0,0286
2,17	0,0268
2,20	0,0251
2,23	0,0235

x	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/2}$
2,545	0,01106
2,550	0,01092
2,555	0,01079
2,560	0,01065
2,565	0,01051
2,570	0,01038
2,575	0,01025
2,580	0,01012
2,585	0,00998
2,590	0,00986
2,595	0,00973
2,600	0,00960
2,605	0,00948
2,610	0,00936
2,615	0,00924
2,620	0,00912

2.

д)

x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$
0,40	0,97355	0,46	0,96510	0,51	0,95721
0,41	0,97222	0,47	0,96359	0,52	0,95554
0,42	0,97086	0,48	0,96204	0,53	0,95384
0,43	0,96947	0,49	0,96046	0,54	0,95210
0,44	0,96804	0,50	0,95885	0,55	0,95034
0,45	0,96659				

е)

x	$\frac{\cos x}{x}$	x	$\frac{\cos x}{x}$	x	$\frac{\cos x}{x}$
0,25	3,87565	0,31	3,07204	0,36	2,59971
0,26	3,71688	0,32	2,96636	0,37	2,51980
0,27	3,56952	0,33	2,86680	0,38	2,44385
0,28	3,43234	0,34	2,77281	0,39	2,37156
0,29	3,30429	0,35	2,68392	0,40	2,30265
0,30	3,18446				

§ 3

1.

в)

x	$e^{1/x}$
2,0	1,64872
2,5	1,49182
3,0	1,39561
3,5	1,33071
4,0	1,28402
4,5	1,24885
5,0	1,22140
5,5	1,19940
6,0	1,18136
6,5	1,16631
7,0	1,15356
7,5	1,14263
8,0	1,13315
8,5	1,12485
9,0	1,11752
9,5	1,11100

г)

x	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$
0,40	0,26041
0,42	0,25828
0,44	0,25607
0,46	0,25377
0,48	0,25140
0,50	0,24895
0,52	0,24642
0,54	0,24382
0,56	0,24116
0,58	0,23842
0,60	0,23562
0,62	0,23277
0,64	0,22985
0,66	0,22688
0,68	0,22386
0,70	0,22080

x	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$
1,2	0,13731
1,3	0,12118
1,4	0,10587
1,5	0,09158
1,6	0,07843
1,7	0,06650
1,8	0,05583
1,9	0,04640
2,0	0,03818
2,1	0,03110
2,2	0,02508
2,3	0,02003
2,4	0,01583
2,5	0,01239
2,6	0,00960
2,7	0,00737

§ 5

1.

в)

x	$1/x^3$	x	$1/x^3$	x	$1/x^3$
3	0,037037	15	0,000296	25	0,000064
5	0,008000	17	0,000204	27	0,000051
7	0,002915	19	0,000146	29	0,000041
9	0,001372	21	0,000108	31	0,000034
11	0,000751	23	0,000082	33	0,000028
13	0,000455				

г)

x	$x/(1+x)$	x	$x/(1+x)$	x	$x/(1+x)$
0,007	0,006951	0,025	0,024390	0,040	0,038462
0,010	0,009901	0,028	0,027237	0,043	0,041227
0,013	0,012833	0,031	0,030068	0,046	0,043977
0,016	0,015748	0,034	0,032882	0,049	0,046711
0,019	0,018646	0,037	0,035680	0,052	0,049430
0,022	0,021526				

2.

	а)	б)
x	$\sqrt{x}$	$x\sqrt{x}$
2	1,414214	2,828427
3	1,732051	5,196152
4	2,000000	8,000000
5	2,236068	11,180340
6	2,449490	14,696938
7	2,645751	18,520259
8	2,828427	22,627417
9	3,000000	27,000000
10	3,162278	31,622777
11	3,316625	36,482873
12	3,464102	41,569219
13	3,605551	46,872167
14	3,741657	52,383203
15	3,872983	58,094750
16	4,000000	64,000000
17	4,123106	70,092796

	в)	г)
x	$\sqrt{1+x^2}$	$\sqrt{x^2+1}/x$
0,300	1,044031	3,480102
0,302	1,044607	3,458964
0,304	1,045187	3,438115
0,306	1,045771	3,417551
0,308	1,046357	3,397265
0,310	1,046948	3,377251
0,312	1,047542	3,357506
0,314	1,048139	3,338023
0,316	1,048740	3,318798
0,318	1,049345	3,299826
0,320	1,049952	3,281101
0,322	1,050564	3,262620
0,324	1,051178	3,244378
0,326	1,051797	3,226370
0,328	1,052418	3,208592
0,330	1,053043	3,191040

3.

а)

x	$1/\sqrt{x}$
3	0,577350
5	0,447214
7	0,377964
9	0,333333
11	0,301511
13	0,277350
15	0,258199
17	0,242536
19	0,229416
21	0,218218
23	0,208514
25	0,200000
27	0,192450
29	0,185695
31	0,179605
33	0,174078

б)

x	$1/\sqrt{2+x^2}$
0,300	0,691714
0,302	0,691515
0,304	0,691315
0,306	0,691114
0,308	0,690911
0,310	0,690707
0,312	0,690502
0,314	0,690296
0,316	0,690089
0,318	0,689881
0,320	0,689672
0,322	0,689461
0,324	0,689249
0,326	0,689037
0,328	0,688823
0,330	0,688608

в)

x	$(2x+1)/\sqrt{x}$
3,100	6,767962
3,105	6,777504
3,110	6,787048
3,115	6,796593
3,120	6,806139
3,125	6,815685
3,130	6,825233
3,135	6,834782
3,140	6,844333
3,145	6,853884
3,150	6,863436
3,155	6,872990
3,160	6,882544
3,165	6,882099
3,170	6,901656
3,175	6,911214

г)

x	$1/\sqrt{x(x+1)}$
2,300	0,362977
2,302	0,362709
2,304	0,362442
2,306	0,362175
2,308	0,361909
2,310	0,361643
2,312	0,361377
2,314	0,361112
2,316	0,360847
2,318	0,360583
2,320	0,360319
2,322	0,360055
2,324	0,359792
2,326	0,359529
2,328	0,359267
2,330	0,359005

4.

а)

x	$\sqrt[3]{x}$	x	$\sqrt[3]{x}$	x	$\sqrt[3]{x}$
3	1,442250	9	2,080084	14	2,410142
4	1,587401	10	2,154435	15	2,466212
5	1,709976	11	2,223980	16	2,519842
6	1,817121	12	2,289428	17	2,571282
7	1,912931	13	2,351335	18	2,620741
8	2,000000				

б)

x	$1/\sqrt[3]{x}$	x	$1/\sqrt[3]{x}$	x	$1/\sqrt[3]{x}$
3	0,693361	9	0,480750	14	0,414913
4	0,629961	10	0,464159	15	0,405480
5	0,584804	11	0,449644	16	0,396850
6	0,550321	12	0,436790	17	0,388911
7	0,522758	13	0,425290	18	0,381571
8	0,500000				

5.

а)

x	$\sqrt[4]{x}$
0,05	0,472871
0,07	0,514369
0,09	0,547723
0,11	0,575901
0,13	0,600462
0,15	0,622333
0,17	0,642114
0,19	0,660220
0,21	0,676947
0,23	0,692519
0,25	0,707107
0,27	0,720843
0,29	0,733837
0,31	0,746175
0,33	0,757929
0,35	0,769161

б)

x	$\sqrt[5]{x}$
0,05	0,549280
0,07	0,587516
0,09	0,617801
0,11	0,643100
0,13	0,664950
0,15	0,684255
0,17	0,701600
0,19	0,717382
0,21	0,731887
0,23	0,745325
0,25	0,757858
0,27	0,769614
0,29	0,780692
0,31	0,791175
0,33	0,801130
0,35	0,810613

в)

x	$\sqrt[6]{x}$
0,05	0,606962
0,07	0,641972
0,09	0,669433
0,11	0,692201
0,13	0,711744
0,15	0,728923
0,17	0,744289
0,19	0,758215
0,21	0,770968
0,23	0,782747
0,25	0,793701
0,27	0,803947
0,29	0,813579
0,31	0,822672
0,33	0,831290
0,35	0,839482

г)

x	$\sqrt[7]{x}$
0,05	0,651836
0,07	0,683934
0,09	0,708934
0,11	0,729552
0,13	0,747172
0,15	0,762603
0,17	0,776362
0,19	0,788796
0,21	0,800155
0,23	0,810622
0,25	0,820335
0,27	0,829404
0,29	0,837915
0,31	0,845936
0,33	0,853525
0,35	0,860730

Глава III

§ 3

1. $x_1=0,5$, $x_2=1,3$, $x_3=2,5$ (указаны точные значения неизвестных). **2.** $x_1=0,36450$, $x_2=0,53053$, $x_3=-0,40649$. **3.** $x_1=1,34$, $x_2=-4,76$, $x_3=2,58$. **4.** $x_1=2,06$, $x_2=3,22$, $x_3=4,03$, $x_4=-2,01$, $x_5=3,00$.

5.

α	β	x_1	x_2	x_3
0,0	0,0	0,58000	1,45834	0,49908
	0,2	0,55593	1,47017	0,49683
	0,4	0,53185	1,48200	0,49458
	0,6	0,50577	1,49383	0,49233
	0,8	0,48369	1,50566	0,49008
	1,0	0,45961	1,51749	0,48783
0,5	0,0	0,63462	1,50566	0.45563
	0,2	0,61003	1,51785	0,45181
	0,4	0,58544	1,53004	0,44799
	0,6	0,56086	1,54224	0,44417
	0,8	0,53627	1,55443	0,44035
	1,0	0,51168	1,56663	0,43653
1,0	0,0	0,69060	1,56164	0,41760
	0,2	0,66538	1,57435	0,41224
	0,4	0,64015	1,58706	0,40689
1,0	0,6	0,61493	1,59977	0,40154
	0,8	0,58970	1,61248	0,39619
	1,0	0,56448	1,62519	0,39083
1,5	0,0	0,74903	1,62679	0,38373
	0,2	0,72303	1,64036	0,37685
	0,4	0,69704	1,65374	0,36997
	0,6	0,67105	1,66713	0,36308
	0,8	0,64506	1,68052	0,35620
	1,0	0,61906	1,69391	0,34932
2,0	0,0	0,81079	1,70266	0,35306
	0,2	0,78407	1,71692	0,34461
	0,4	0,75718	1,73118	0,33616
	0,6	0,73029	1,74544	0,32771
	0,8	0,70339	1,75970	0,31926
	1,0	0,67650	1,77395	0,31081

6.

α	β	x_1	x_2	x_3	x_4
0,0	0,0	—3,01480	—1,17641	4,59989	—0,73923
	0,2	—2,94057	—1,04992	4,44130	—0,79040
	0,4	—2,86635	—0,92344	4,28270	—0,84157
	0,6	—2,79212	—0,79695	4,12410	—0,89274
	0,8	—2,71789	—0,67047	3,96550	—0,94391
	1,0	—2,64366	—0,54398	3,80691	—0,99508
0,2	0,0	—2,89809	—0,68363	4,18049	—0,95161
	0,2	—2,82754	—0,56313	4,02394	—0,99553
	0,4	—2,75700	—0,44264	3,86739	—1,03946
	0,6	—2,68645	—0,32215	3,71084	—1,08338
	0,8	—2,61591	—0,20166	3,55429	—1,12731
	1,0	—2,54536	—0,08116	3,39774	—1,17123
0,4	0,0	—2,80040	—0,18579	3,72950	—1,12449
	0,2	—2,73345	—0,07220	3,57619	—1,16140
	0,4	—2,66650	0,04139	3,42287	—1,19831
	0,6	—2,59955	0,15498	3,26956	—1,23522
	0,8	—2,53260	0,26857	3,11624	—1,27214
	1,0	—2,46565	0,38215	2,96293	—1,30905
0,6	0,0	—2,72373	0,30586	3,25743	—1,25443
	0,2	—2,66020	0,41180	3,10845	—1,28472
	0,4	—2,59668	0,51774	2,95947	—1,31501
	0,6	—2,53316	0,62368	2,81049	—1,34530
	0,8	—2,46963	0,72961	2,66151	—1,37559
	1,0	—2,40611	0,83555	2,51253	—1,40588
0,8	0,0	—2,66904	0,78068	2,77541	—1,34003
	0,2	—2,60871	0,87841	2,63173	—1,36422
	0,4	—2,54837	0,97615	2,48805	—1,38840
	0,6	—2,48804	1,07389	2,34438	—1,41259
	0,8	—2,42770	1,17162	2,20070	—1,43678
	1,0	—2,36737	1,26936	2,05702	—1,46096

§ 4

2. а) $x=-1{,}4000$, $y=0{,}7406$, б) $x=-1{,}590$, $y=0{,}7409$. **3.** $x_1=3{,}000$, $x_2=-2{,}000$, $x_3=6{,}000$. **4.** $x_1=1{,}34$, $x_2=-4{,}76$, $x_3=2{,}58$. **5.** $x_1=0{,}3732$, $x_2=0{,}1415$, $x_3=0{,}4622$. **6.** $x_1=3{,}04$, $x_2=1{,}80$, $x_3=2{,}92$, $x_4=-1{,}53$, $x_5=3{,}32$. **7.** $x_1=1{,}7781$, $x_2=-4{,}3351$, $x_3=2{,}5304$.

8.

α	β	x_1	x_2	x_3
0,00	0,00	—1,0890	1,3127	1,4013
	0,35	—0,98110	1,2941	1,3913
	0,70	—0,87319	1,2756	1,3813
	1,05	—0,76529	1,2570	1,3713
	1,40	—0,65738	1,2385	1,3613
	1,75	—0,54948	1,2199	1,3514
0,25	0,00	—1,2201	1,3222	1,4034
	0,35	—1,1103	1,3035	1,3933
	0,70	—1,0004	1,2848	1,3832
	1,05	—0,89054	1,2661	1,3730
	1,40	—0,78068	1,2474	1,3629
	1,75	—0,67082	1,2287	1,3528
0,50	0,00	—1,3533	1,3318	1,4057
	0,35	—1,2415	1,3130	1,3954
	0,70	—1,1296	1,2942	1,3852
0,50	1,05	—1,0178	1,2754	1,3750
	1,40	—0,90595	1,2565	1,3647
	1,75	—0,79410	1,2377	1,3545
0,75	0,00	—1,4887	1,3416	1,4082
	0,35	—1,3748	1,3227	1,3978
	0,70	—1,2610	1,3137	1,3874
	1,05	—1,1471	1,2847	1,3771
	1,40	—1,0332	1,2658	1,3667
	1,75	—0,91938	1,2468	1,3563
1,00	0,00	—1,6262	1,3516	1,4108
	0,35	—1,5103	1,3325	1,4003
	0,70	—1,3944	1,3134	1,3899
	1,05	—1,2785	1,2943	1,3794
	1,40	—1,1626	1,2752	1,3689
	1,75	—1,0467	1,2560	1,3584

9.

α	β	x_1	x_2	x_3	x_4
0,0	0,0	0,44093	−0,43009	1,1546	1,5463
	0,5	0,19749	−0,41385	1,2676	2,5847
	1,0	−0,04594	−0,39762	1,3805	3,6231
	1,5	−0,28938	−0,38138	1,4935	4,6615
	2,0	−0,53281	−0,36514	1,6065	5,6999
	2,5	−0,77625	−0,34891	1,7195	6,7384
0,5	0,0	0,90593	−0,45260	1,0238	−0,35119
	0,5	1,0809	−0,50835	1,1190	−0,97083
	1,0	1,2559	−0,56410	1,2142	−1,5905
	1,5	1,4309	−0,61985	1,3094	−2,2101
	2,0	1,6058	−0,67559	1,4046	−2,8298
	2,5	1,7808	−0,7314	1,4998	−3,4494
1,0	0,0	0,78167	−0,37945	0,92704	0,080047
	0,5	0,86137	−0,41615	1,0135	−0,15149
	1,0	0,94107	−0,45285	1,10000	−0,38302
	1,5	1,0208	−0,48955	1,1865	−0,61455
	2,0	1,1005	−0,52625	1,2730	−0,84609
	2,5	1,1802	−0,56295	1,3594	−1,0776
1,5	0,0	0,73902	−0,32853	0,84798	0,17381
	0,5	0,79675	−0,35925	0,92673	0,03466
	1,0	0,85448	−0,38997	1,0055	−0,10449
	1,5	0,91221	−0,42070	1,0843	−0,24364
	2,0	0,96994	−0,45142	1,1630	−0,38279
	2,5	1,0277	−0,48214	1,2418	−0,52193
2,0	0,0	0,70966	−0,28660	0,78251	0,20954
	0,5	0,75769	−0,31368	0,85478	0,11182
	1,0	0,80571	−0,34076	0,92706	0,01411
	1,5	0,85374	−0,36784	0,99933	−0,08361
	2,0	0,90176	−0,39492	1,0716	−0,18132
	2,5	0,94979	−0,42200	1,1439	−0,27904

§ 5

1. $x_1=1{,}24$, $x_2=-2{,}45$, $x_3=-2{,}50$. **2.** $x_1=2{,}34$, $x_2=4{,}51$, $x_3=-6{,}00$, $x_4=-1{,}30$. **3.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=-1$, $x_5=4$.

§ 6

1. $x_1=1{,}3$, $x_2=2{,}2$, $x_3=3{,}5$ (указаны точные значения неизвестных). **2.** $x_1=0{,}74481$, $x_2=0{,}79206$, $x_3=0{,}82455$. **3.** $x_1=3{,}7$, $x_2=-1{,}5$, $x_3=2{,}1$, $x_4=1{,}3$ (указаны точные значения неизвестных). **4.** $x_1=0{,}29270$, $x_2=1{,}4196$, $x_3=1{,}1799$, $x_4=0{,}89104$.

5.

α	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,00	0,00	0,79838	0,22453	0,17223	0,92064	0,51090
	0,35	0,87179	0,23413	0,08283	0,90004	0,59660
	0,70	0,94520	0,24373	−0,00658	0,87944	0,68229
	1,05	1,01860	0,25333	−0,09598	0,85884	0,76798
	1,40	1,09201	0,26293	−0,18538	0,83823	0,85367
	1,75	1,16542	0,27253	−0,27479	0,81763	0,93936

α	β	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,25	0,00	0,74312	0,25963	0,15411	1,00146	0,47677
	0,35	0,81306	0,26913	0,07001	0,98056	0,55763
	0,70	0,88299	0,27864	—0,01409	0,95965	0,63848
	1,05	0,95292	0,28814	—0,09820	0,93875	0,71934
	1,40	1,02285	0,29765	—0,18230	0,91784	0,80020
	1,75	1,09279	0,30715	—0,26640	0,89694	0,88105
0,50	0,00	0,69015	0,29830	0,13395	1,09142	0,44328
	0,35	0,75694	0,30781	0,05457	1,07007	0,51986
	0,70	0,82374	0,31733	—0,02481	1,04871	0,59643
	1,05	0,89053	0,32685	—0,10420	1,02736	0,67300
	1,40	0,95732	0,33636	—0,18358	1,00601	0,74957
	1,75	1,02412	0,34588	0,26296	0,98466	0,82614
0,75	0,00	0,63861	0,34149	0,11151	1,19270	0,40994
	0,35	0,70256	0,35113	0,03635	1,17074	0,48269
	0,70	0,76651	0,36077	—0,03881	1,14878	0,55544
	1,05	0,83046	0,37041	—0,11396	1,12681	0,62820
	1,40	0,89440	0,38005	—0,18912	1,10485	0,70095
	1,75	0,95835	0,38969	—0,26427	1,08289	0,77370
1,00	0,00	0,58764	0,39048	0,08637	1,30815	0,37619
	0,35	0,69900	0,40036	0,01501	1,28539	0,44552
	0,70	0,71036	0,41025	—0,05634	1,26263	0,51485
	1,05	0,77172	0,42013	—0,12769	1,23987	0,58418
	1,40	0,83308	0.43002	—0,19904	1,21711	0,65352
	1,75	0,89445	0,43990	—0,27039	1,19435	0,72285

§ 7

1.

α	Δ
0,0	—646,416
0,5	—633,677
1,0	—614,329
1,5	—589,120
2,0	—558,802
2,5	—524,123
3,0	—485,835
3,5	—444,686
4,0	—401,428
4,5	—356,809
5,0	—311,581

2.

α	Δ
0,0	—38,5112
0,5	83,4051
1,0	279,202
1,5	566,879
2,0	965,936
2,5	1497,37
3,0	2183,69
3,5	3048,89
4,0	4118,47
4,5	5419,43
5,0	6980,27

3.

α	Δ
0,00	1950,02
0,25	1984,06
0,50	1985,08
0,75	1951,61
1,00	1883,13
1,25	1780,17
1,50	1644,49
1,75	1479,12
2,00	1288,53
2,25	1078,71
2,50	857,342

§ 8

1. $$\begin{pmatrix} 0,1558 & 0,1448 & -0\ 2148 & -0,0233 \\ -0,0243 & 0,6957 & -0,6562 & -0,0242 \\ -0,0439 & -0,6183 & -0,7486 & -0,0146 \\ -0,0259 & -0,2596 & 0,2294 & 0,1666 \end{pmatrix}.$$

2. $$\begin{pmatrix} 0,1327 & 0,0162 & -0,0472 & -0,0228 \\ -0,0511 & 0,1730 & 0,0056 & -0,0348 \\ 0 & -0,0715 & 0,0729 & 0 \\ -0,0414 & -0,0341 & 0,0022 & 0,1796 \end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix} 0,93794 & -0,06844 & -0,07961 & -0,08592 \\ -0,08852 & 0,90599 & -0,09919 & -0,10560 \\ -0,11135 & -0,11697 & -0,87842 & -0,12707 \\ -0,13546 & -0,14018 & -0,14381 & 0,85161 \end{pmatrix}.$$

4.

α	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}
0,0	1,20551 −0,24219 −0,02266 −4,67126	−0,03637 0,03422 0,25422 −0,26049	0,13541 0,16237 −0,04151 −0,67114	−0,45050 −0,00175 −0,02824 2,33731
0,5	−0,68679 0,09707 0,00195 2,87191	−0,10254 0,03631 0,22568 0,07418	−0,11822 0,19025 −0,03125 0,35429	0,45249 −0,14780 −0,03532 −1,31347
1,0	−0,24812 0,02273 −0,00284 1,11046	−0,07228 0,02466 0,20199 0,00610	−0,05634 0,16511 −0,02676 0,11865	0,23168 −0,09806 −0,02902 −0,46917
1,5	−0,14538 0,00719 −0,00352 0,69182	−0,05907 0,01808 0,18289 −0,00604	−0,04027 0,15028 −0,02292 0,06453	0,17453 −0,07953 −0,02538 −0,27226
2,0	−0 10010 0,00133 −0,00356 0,50385	−0,05017 0,01359 0,16711 −0,00951	−0,03225 0,13861 −0,01986 0,04132	0,14622 −0,06775 −0,02256 −0,18592

5.

α	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	α	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}
0,0	0,042334 −0,002881 −0,004653	−0,002399 0,032180 −0,005143	−0,005548 −0,001317 0,035716	0,6	0,041271 −0,002813 −0,004447	−0,002356 0,032172 −0,005041	−0,005297 −0,001298 0,034952
0,2	0,041973 −0,002858 −0,004586	−0,002384 0,032178 −0,005109	−0,005462 −0,001311 0,035457	0,8	0,040928 −0,002791 −0,004380	−0,002342 0,032170 −0,005008	−0,005217 −0,001290 0,034704
0,4	0,041619 −0,002835 −0,004516	−0,002370 0,032175 −0,005075	−0,005379 −0,001305 0,035203				

§ 9

3. $x_1 = 1{,}9031$, $x_2 = 3{,}2007$, $x_3 = 5{,}0428$, $x_4 = 0{,}1432$. **4.** $x_1 = 2{,}9274$, $x_2 = 3{,}0505$, $x_3 = 4{,}8286$.

5.

α	β	x_1	x_2	x_3
0,0	0,0	0,9444	1,1743	1,1775
	0,2	0,9449	1,1679	1,1786
	0,4	0,9454	1,1614	1,1796
	0,6	0,9459	1,1550	1,1806
	0,8	0,9463	1,1485	1,1816
	1,0	0,9468	1,1421	1,1827
0,2	0,0	0,9378	1,1751	1,1700
	0,2	0,9383	1,1687	1,1711
	0,4	0,9387	1,1623	1,1721
	0,6	0,9392	1,1558	1,1731
	0,8	0,9397	1,1494	1,1741
	1,0	0,9402	1,1430	1,1752
0,4	0,0	0,9312	1,1760	1,1626
	0,2	0,9317	1,1695	1,1637
	0,4	0,9322	1,1631	1,1647
0,4	0,6	0,9327	1,1567	1,1657
	0,8	0,9331	1,1502	1,1667
	1,0	0,9336	1,1438	1,1677
0,6	0,0	0,9248	1,1768	1,1554
	0,2	0,9253	1,1704	1,1564
	0,4	0,9257	1,1639	1,1574
	0,6	0,9262	1,1575	1,1584
	0,8	0,9267	1,1511	1,1594
	1,0	0,9271	1,1446	1,1604
0,8	0,0	0,9184	1,1776	1,1481
	0,2	0,9189	1,1712	1,1491
	0,4	0,9194	1,1648	1,1501
	0,6	0,9198	1,1583	1,1512
	0,8	0,9203	1,1519	1,1522
	1,0	0,9208	1,1454	1,1532

Глава IV

§ 1

1.

α	k				
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,5	0,66293 0,62460	0,79656 0,58427	0,91099 0,54085	1,0145 0,49265	1,1077 0,43962
0,6	0,64621 0,61215	0,77208 0,56672	0,87646 0,51918	0,96799 0,46786	1,0484 0,41262
0,7	0,63103 0,60053	0,75057 0,55030	0,84723 0,49877	0,93000 0,44417	1,0013 0,38617
0,8	0,61711 0,58963	0,73135 0,53484	0,82180 0,47943	0,89775 0,42145	0,96195 0,36036
0,9	0,60428 0,57938	0,71396 0,52021	0,79926 0,46102	0,86964 0,39960	0,92814 0,33519

2.

α	k				
	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,0	0,27241 0,05822	0,33256 0,08271	0,38791 0,10778	0,43933 0,13289	0,48748 0,15772
1,1	0,26301 0,13345	0,32249 0,15332	0,37727 0,17435	0,42824 0,19588	0,47606 0,21752
1,2	0,24614 0,20804	0,30636 0,22311	0,36161 0,24007	0,41291 0,25806	0,46100 0,27655
1,3	0,22065 0,28401	0,28346 0,29357	0,34043 0,30607	0,39298 0,32030	0,44203 0,33552
1,4	0,18348 0,36450	0,25202 0,36669	0,31258 0,37377	0,36764 0,38367	0,41856 0,39527

§ 2

1. $x=3{,}487$, $y=2{,}262$. **2.** $x=1{,}0000$, $y=2{,}0000$.

3.

α	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
x y	1,5020 1,5456	1,3388 1,6124	1,2343 1,6615	1,1590 1,7006	1,1010 1,7333	1,0544 1,7613

4. $x_1=-2{,}0000$, $y_1=2{,}0000$, $x_2=1{,}3508$, $y_2=0{,}59214$. **5.** $x=1{,}7913$, $y=-0{,}34422$.

Глава V

§ 2

1. $|R_1|<10^{-4}$. а) 1,6603, б) 1,6686, в) 1,6871, г) 1,7074, д) 1,7177, е) 1,7437, ж) 1,7648, з) 1,7701, и) 1,8022, к) 1,8112.

2. $|R_2|<0{,}16\cdot10^{-4}$, а) 0,91317, б) 0,93841, в) 0,97462, г) 0,98880, д) 0,99946, е) 0,99927, ж) 0,98703, з) 0,96155, и) 0,93653, к) 0,89596, л) 0,82409, м) 0,79777, н) 0,73698, о) 0,64772, п) 0,61595.

3. $|R_1|<0{,}36\cdot10^{-4}$. **4.** $|R_1|\leqslant0{,}125\cdot10^{-6}$.

5. $|R_1|<0{,}7\cdot10^{-7}$.

6. 1) а) 0,50674, б) 0,50725, в) 0,51043, г) 0,51077, д) 0,45818, е) 0,45783, ж) 0,45761, з) 0,45696;

2) а) 0,5732, б) 0,5807, в) 0,5880, г) 0,5956, д) 1,5313, е) 1,5433, ж) 1,5510, з) 1,5642;

3) а) 0,29504, б) 0,29261, в) 0,29780, г) 0,29907, д) 0,60127, е) 0,60412, ж) 0,61001, з) 0,61190.

§ 3

1. а) 0,48358, б) 0,48267, в) 0,48245, г) 0,48161, д) 0,48104, е) 0,48055, ж) 0,48019, з) 0,47973, и) 0,47941, к) 0,47861, л) 0,48876, м) 0,48811, н) 0,48747, о) 0,48695, п) 0,48612, р) 0,48595, с) 0,48579, т) 0,48535, у) 0,48482, ф) 0,48420.

2. а) 0,99116, б) 0,99988, в) 1,00825, г) 1,01464, д) 1,02762, е) 1,04631, ж) 1,05596, з) 1,06596, и) 1,07614, к) 0,89488, л) 0,89795, м) 0,90588, н) 0,91574, о) 0,92577, п) 0,94097, р) 0,94444, с) 0,95460, т) 0,96622, у) 0,97389.

3. а) 0,44812, б) 0,45038, в) 0,45551, г) 0,45906, д) 0,46109, е) 0,46237, ж) 0,46388, з) 0,47189, и) 0,47370, к) 0,47707, л) 0,41959, м) 0,41893, н) 0,42293, о) 0,42433, п) 0,42967, р) 0,43175, с) 0,43610, т) 0,43886, у) 0,44206.

4.

а)

x	$f(x)$
0,85	0,8274
0,95	0,7868
1,05	0,7428
1,15	0,6957

б)

x	$f(x)$
1,35	1,5102
1,45	1,5989
1,55	1,6971
1,65	1,8056

в)

x	$f(x)$
2,35	2,1958
2,45	2,4050
2,55	2,6334
2,65	2,8829

§ 4

1. а) $-14,2x^2+28,67x+91,37$, б) x^3+x^2-x+2, в) $-0,0205x^3-0,02x^2+2,73x+1,45$, г) $-4,1x^5+337,8x^4-11\,283,9x^3+182\,940,4x^2-1\,460\,817x+4\,593\,561,7$, д) $x^2-10x+1$, е) x^4-3x^2+2.

2. а) 3,899, б) 3,937, в) 3,975, г) 4,012, д) 4,087.

3. а) 6,055, б) 6,223, в) 6,527, г) 6,938, д) 7,211, е) 7,294.

4. $\sin\frac{\pi}{12}=0,2588\pm 0,3\cdot 10^{-3}$. **5.** $\cos\frac{\pi}{5}=0,9397\pm 0,3\cdot 10^{-4}$.

6. а) 49,46, б) 15,38, в) 778687.

7. а) 1,39316, б) 1,40175, в) 1,40865, г) 1,42252, д) 1,44876, е) 1,46466, ж) 1,47711, з) 1,50404, и) 1,48247, к) 1,49502, л) 1,50043, м) 1,46999.

§ 5

1. а) 2,122, б) 5,2.

2. а) 1,021, б) 1,045, в) 1,063, г) 1,072, д) 1,113, е) 1,128, ж) 1,162, з) 1,185, и) 1,215, к) 1,239.

3. а) 0,525, б) 0,541, в) 0,568, г) 0,587, д) 0,623, е) 0,631, ж) 0,668, з) 0,679.

4. а) 1,075, б) 1,123, в) 1,138, г) 1,159, д) 1,175, е) 1,218, ж) 1,221, з) 1,248, и) 1,269.

5. а) 0,055, б) 0,082, в) 0,123.

6. а) 1,113, б) 1,138, в) 1,167, г) 1,195, д) 1,221, е) 1,242.

7. а) 0,082, б) 0,091, в) 0,113.

§ 6

1. 0,6529. **2.** 0,6507. **3.** 1,8411. **4.** 0,21331. **5.** 1,47767. **6.** 0,9286. **7.** 0,2427. **8.** 0,8767. **9.** 0,7391. **10.** 0,4384. **11.** 0,22106. **12.** 0,7208. **13.** 0,87550. **14.** 0,37696. **15.** 0,7872.

16.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1,010	1,053	1,024	0,978	0,929	0,474	0,642	0,676	0,675	0,662

17.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0,6180	0,4943	0,4162	0,3683	0,5143	0,4196	0,3584	0,3201	0,2814	0,2556

18.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0,8894	0,8300	0,7688	0,7051	0,6378	0,6063	0,5796	0,5533	0,4983	0,4701

19. 1,7320. **20.** —0,7321. **21.** 0,6180. **22.** 0,2679. **23.** —3,1623. **24.** 1,2361. **25.** —2,3028. **26.** 3,6457. **27.** 1,6180.

Глава VI

§ 1

1. а)

x	y'	x	y'	x	y'
1,2	0,714	1,8	1,317	2,4	2,298
1,3	0,797	1,9	1,448	2,5	2,517
1,4	0,886	2,0	1,591	2,6	2,756
1,5	0,982	2,1	1,745	2,7	3,016
1,6	1,085	2,2	1,914	2,8	3,301
1,7	1,197	2,3	2,098		

Указание. Вычисления проведены по формуле (1.7).

б)

x	y''	x	y''	x	y''
1,2	0,81	1,8	1,25	2,4	2,08
1,3	0,85	1,9	1,38	2,5	2,30
1,4	0,92	2,0	1,48	2,6	2,49
1,5	1,00	2,1	1,61	2,7	2,72
1,6	1,07	2,2	1,77	2,8	2,98
1,7	1,16	2,3	1,92	2,9	3,27

Указание. Вычисления проведены по формуле (1.12).

в) 0,566; 0,636; 3,612; 3,954. г) 0,67; 3,56.

2. а)

x	y'	x	y'	x	y'
0,8	6,276	1,8	10,017	2,8	15,772
1,0	6,904	2,0	11,975	3,0	17,261
1,2	7,587	2,2	12,021	3,2	18,889
1,4	8,329	2,4	13,163	3,4	20,671
1,6	9,137	2,6	14,410		

Указание. Вычисления проведены по формуле (1.7).

б)

x	y''	x	y''	x	y''
0,8	3,021	1,8	4,589	2,8	7,120
1,0	3,272	2,0	5,004	3,0	7,782
1,2	3,558	2,2	5,461	3,2	8,514
1,4	3,870	2,4	5,964	3,4	9,313
1,6	4,212	2,6	6,513		

Указание. Вычисления проведены по формуле (1.9) с учетом разностей до четвертого порядка включительно.

в) 5,160; 5,695; 22,620; 24,755. г) 2,570; 2,800; 10,181; 11,161.

§ 2

1. а) Погрешностью усечения можно пренебречь, погрешность округления составляет $\frac{3\cdot 0{,}5\cdot 10^{-4}}{2h}=0{,}8\cdot 10^{-3}$; таким образом, погрешность вычисления производных y' не превосходит 0,001.

б) Погрешностью усечения можно пренебречь, погрешность округления составляет $\frac{4\cdot 0{,}5\cdot 10^{-4}}{h^2}=2\cdot 10^{-2}$; таким образом, погрешность вычисления производных y'' не превосходит 0,02, так что последний выписанный знак значения y'' сомнительный.

2. а) Погрешность не превосходит 0,0005.

б) Погрешность не превосходит 0,005, так что последний выписанный знак значения y'' сомнительный.

§ 3

1. а) Оптимальный шаг $h=0{,}2$; формула

$$y_0'\approx\frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}-\frac{1}{6}\,\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}\right)$$

дает три верных десятичных знака в точках

$$x=1{,}4+0{,}1\cdot k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 12).$$

б) Оптимальный шаг $h=0{,}3$; формула

$$y_0''\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}-\frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2}\right)$$

дает погрешность, не превышающую $2{,}2\cdot 10^{-3}$, но применима только в точках $x=1{,}6+0{,}1\cdot k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 8)$. $y''|_{x=1,6}\approx 1{,}071$.

2. а) Оптимальный шаг $h=0{,}4$; формула

$$y_0'\approx\frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}-\frac{1}{6}\,\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{1}{30}\,\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}\right)$$

дает погрешность, не превышающую 0,00025, но применима только в точках $x=1{,}2+0{,}2\cdot k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9)$.

б) Оптимальный шаг $h=0{,}4$; формула

$$y_0''\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}-\frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2}\right)$$

дает погрешность, не превышающую 0,0013, но применима только в точках $x=1,2+0,2\cdot k$ ($k=0, 1, 2, \ldots, 9$). $y''|_{x=1,6}=4,212$.

Глава VII

§ 1

1. $-0,995$; -1; $\Delta=0,5\cdot10^{-2}$; $\delta=0,5\%$. **2.** 0,3068, $\Delta=1,3\cdot10^{-5}$. **3.** 101/60, $|R|\leqslant 0,7$. **4.** 38, $|R|\leqslant 6$.

5. а) 0,213, $|R|\leqslant 0,8\cdot10^{-2}$, б) 0,2112, $|R|\leqslant 0,26\cdot10^{-3}$.

6. а) 0,311, $|R|\leqslant 0,19\cdot10^{-2}$, б) 0,29624, $|R|\leqslant 0,13\cdot10^{-4}$.

7. а) 0,903, $|R|\leqslant 0,19\cdot10^{-2}$, б) 1,05575, $|R|\leqslant 0,13\cdot10^{-4}$.

8. а) 1,828, $|R|\leqslant 2,5\cdot10^{-4}$, б) 1,827847, $|R|\leqslant 2,5\cdot10^{-7}$.

9. а) 0,697, $|R|\leqslant 0,083$, б) 0,693, $|R|\leqslant 0,033$.

10. 1,898, $|R|\leqslant 0,025$.

§ 2

1. 0,69. **2.** 0,79. **3.** 0,88137. **4.** 0,84. **5.** 0,28. **6.** 0,10. **7.** 0,09. **8.** 0,67. **9.** 0,1999. **10.** 0,2722. **11.** 0,9160. **12.** 0,5294. **13.** 0,5422. **14.** 0,4998. **15.** 0,1728. **16.** 0,1157. **17.** 1,0896. **18.** 0,5179. **19.** 0,5061. **20.** 0,364. **21.** 0,521. **22.** 1,078. **23.** 0,671. **24.** 0,513. **25.** 1,178. **26.** 0,707. **27.** 1,176. **28.** 3,148. **29.** 0,322. **30.** 0,684. **31.** 1,854.

32.

a	I_1	I_2	a	I_1	I_2	a	I_1	I_2
0,10	0,1569	1,2038	0,45	0,6876	1,6687	0,80	1,1514	2,3373
0,15	0,2349	1,2605	0,50	0,7590	1,7498	0,85	1,2098	2,4547
0,20	0,3125	1,3201	0,55	0,8289	1,8353	0,90	1,2659	2,5785
0,25	0,3893	1,3829	0,60	0,8972	1,9255	0,95	1,3196	2,7092
0,30	0,4654	1,4490	0,65	0,9637	2,0205	1,00	1,3708	2,8471
0,35	0,5407	1,5185	0,70	1,0283	2,1205	1,05	1,4195	2,9926
0,40	0,6147	1,5916	0,75	1,0909	2,2260	1,10	1,4657	3,1463

33.

a	I_1	I_2	a	I_1	I_2	a	I_1	I_2
0,5	0,0478	0,4606	1,1	0,1193	0,6704	1,6	0,1526	0,9074
0,6	0,0608	0,4941	1,2	0,1283	0,7106	1,7	0,1556	0,9702
0,7	0,0737	0,5276	1,3	0,1362	0,7537	1,8	0,1574	1,0411
0,8	0,0862	0,5615	1,4	0,1429	0,8003	1,9	0,1582	1,1222
0,9	0,0981	0,5964	1,5	0,1484	0,8512	2,0	0,1578	1,2163
1,0	0,1092	0,6325						

34. 0,88208, $R\leqslant\frac{1}{15}\cdot10^{-5}$.

§ 3

1. 0,693146, $|R_4|\leqslant 2,3\cdot10^{-5}$. **2.** 0,6931472, $|R_5|\leqslant 1,5\cdot10^{-6}$. **3.** 1,21895, $|R_4|\leqslant 5,8\cdot10^{-4}$. **4.** 0,402184. **5.** 0,27219801. **6.** 0,272203. **7.** 0,822467.

8.

a	I	a	I	a	I
0,5	0,70684	1,3	0,49066	2,1	0,38722
0,7	0,63423	1,5	0,45824	2,3	0,36973
0,9	0,57638	1,7	0,43082	2,5	0,35451
1,1	0,52941	1,9	0,40739		

9.

a	I	a	I	a	I
0,5	2,29086	1,0	1,55367	1,5	0,85034
0,6	2,15742	1,1	1,39955	1,6	0,74126
0,7	2,01412	1,2	1,24969	1,7	0,64753
0,8	1,86380	1,3	1,10666	1,8	0,57143
0,9	1,70936	1,4	0,97282	1,9	0,51765

§ 4

1. 0,0976, $|R| < 0{,}6 \cdot 10^{-6}$. **2.** 0,9046, $|R| < 10^{-3}$. **3.** 0,052, $|R| < 10^{-3}$. **4.** 0,04493, $|R| < 0{,}54 \cdot 10^{-4}$. **5.** 1,60543. **6.** 1,852. **7.** 0,6839. **8.** 0,20136. **9.** 1,057. **10.** 0,337. **11.** 0,962. **12.** 0,488. **13.** 0,507. **14.** 0,0119. **15.** 0,6078. **16.** 0,6205. **17.** 0,0709. **18.** 32,8305. **19.** 0,0264. **20.** 0,0980. **21.** 0,1050. **22.** 0,5013. **23.** 0,2225. **24.** 0,3314. **25.** 0,3402. **26.** 0,6042.

§ 5

1. Указание. Отрезок интегрирования разбить на два: [0; 0,5], [0.5; 1]. 5,24426. **2.** 1,570796. **3.** 0,64041. **4.** 0,785398. **5.** 1,047198. **6.** 11,397928. **7.** 1,570796. **9.** 3,141593.

10.

a \ b	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50
0,60	0,57999	0,52349	0,47713	0,43838	0,40549	0,37722	0,35266
0,67	0,55432	0,50045	0,45623	0,41925	0,38785	0,36086	0,33741
0,74	0,53003	0,47865	0,43644	0,40114	0,37116	0,34538	0,32296
0,81	0,50704	0,45800	0,41771	0,38399	0,35535	0,33071	0,30928
0,88	0,48528	0,43846	0,39997	0,36775	0,34037	0,31681	0,29633
0,95	0,46466	0,41995	0,38317	0,35236	0,32618	0,30365	0,28405
1,02	0,44514	0,40241	0,36724	0,33779	0,31274	0,29117	0,27241
1,09	0,42664	0,38579	0,35215	0,32397	0,29999	0,27934	0,26137
1,16	0,40911	0,37003	0,33785	0,31087	0,28791	0,26813	0,25091

11. Указание. Учесть четность подынтегральной функции. Тогда формула Эрмита будет иметь вид

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos ax\,dx}{(0{,}3+x^2)\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{12}\sum_{k=1}^{12} \frac{\cos ax_k}{0{,}3+x_k^2} = \frac{\pi}{6}\sum_{k=1}^{6} \frac{\cos ax_k}{0{,}3+x_k^2}.$$

a	2,60	2,64	2,68	2,72	2,76	2,80
I	1,24024	1,16812	1,09718	1,02742	0,95896	0,89172
a	2,84	2,88	2,92	2,96	3,00	
I	0,82588	0,76142	0,69844	0,63696	0,57702	

§ 6

1. 0,38. **2.** 0,06270.

3.

a	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
I	0,077	0,071	0,066	0,061	0,058	0,055	0,052	0,050	0,048	0,046	0,045

5. 0,277778. **6.** 0,955933.

7.

a	I
0,5	0,24295
0,6	0,25830
0,7	0,26686
0,8	0,26988
0,9	0,26850
1,0	0,26378
1,1	0,25666
1,2	0,24798
1,3	0,23843
1,4	0,22857
1,5	0,21869

8.

a	I
0,6	0,72302
0,8	0,62692
1,0	0,55411
1,2	0,49687
1,4	0,45061
1,6	0,41240
1,8	0,38028
2,0	0,35288
2,2	0,32922
2,4	0,30857
2,6	0,29038

9.

a	I
1,5	1,31617
1,7	1,31748
1,9	1,31390
2,1	1,30606
2,3	1,29506
2,5	1,28236
2,7	1,27010
2,9	1,26047
3,1	1,25482
3,3	1,25372
3,5	1,25714

10.

a	I
1,0	1,17767
1,2	0,93373
1,4	0,74529
1,6	0,59541
1,8	0,47460
2,0	0,37701
2,2	0,29865
2,4	0,23657
2,6	0,18846
2,8	0,15240
3,0	0,12677

§ 7

1. $4\frac{2}{3}=4{,}667$. **2.** $\ln\frac{25}{24}\approx 0{,}0408$. **3.** $\frac{\pi}{12}\approx 0{,}2618$.

4.

a \ b	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,5	0,1840	0,1804	0,1769	0,1737	0,1705	0,1676
0,6	0,1732	0,1699	0,1668	0,1639	0,1611	0,1584
0,7	0,1636	0,1606	0,1578	0,1551	0,1526	0,1501
0,8	0,1549	0,1523	0,1497	0,1473	0,1449	0,1427
0,9	0,1472	0,1447	0,1424	0,1402	0,1380	0,1360
1,0	0,1401	0,1379	0,1358	0,1337	0,1318	0,1299

5.

a \ b	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	2,0000	1,6715	1,4410	1,2689	1,1351	1,0276
0,2	1,3518	1,1377	0,9857	0,8714	0,7819	0,7097
0,4	0,9290	0,7872	0,6855	0,6083	0,5475	0,4982
0,6	0,6488	0,5535	0,4843	0,4314	0,3895	0,3553
0,8	0,4603	0,3952	0,3475	0,3107	0,2813	0,2572
1,0	0,3315	0,2864	0,2529	0,2269	0,2060	0,1888

7. 2,19. **8.** π. **9.** 2,538. **10.** $3\pi\sqrt{3}$. **11.** $\frac{\pi}{12}\approx 0{,}2618$. **12.** $\frac{1}{2}$.
13. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}\approx 0{,}034$. **14.** $\pi(1-e^{-1})\approx 1{,}98$.

Глава VIII

§ 2

1. $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\frac{x^2}{2!}+\frac{3}{8}\frac{x^3}{3!}+\frac{27}{4}\frac{x^4}{4!}+\ldots$

2. $y=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5-\frac{2}{7}x^7+\ldots$

3. $y=2(x-1)+2(x-1)^2+\frac{5}{3}(x-1)^3+\frac{7}{4}(x-1)^4+\ldots$

4. $y=1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{3!}+\ldots$

5. $y=a\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^4}{4!}-\frac{9x^6}{6!}+\frac{55x^8}{8!}+\ldots\right).$

6. $y=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}+\ldots$

7. $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}+\ldots,\quad z=1-x+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{7}{24}x^4+\ldots$

8. $y=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\ldots,\quad z=-1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{8}+\ldots$

9. $y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{60}x^6+\frac{17}{1260}x^7+\ldots$

10. $y=1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^{n-1}(2n+2)!}x^{2n+2}.$

11. $y=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(2n-2)!}+\ldots=\cos\sqrt{x}.$

12. $y=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$

13. $y=1-\frac{x^2}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots=\frac{\sin x}{x}.$

14. а) $y_1=0{,}51281$, $y_2=0{,}52631$, $y_3=0{,}54052$, б) $y_1=0{,}04883$, $y_2=0{,}09567$, $y_3=0{,}14088$, $z_1=0{,}95246$, $z_2=0{,}90953$, $z_3=0{,}87096$, в) $y_1=1{,}05121$, $y_2=1{,}10532$, $y_3=1{,}16004$, $z_1=-0{,}99875$, $z_2=-0{,}99466$, $z_3=-0{,}98757$.

§ 3

1. $y_1=\frac{x^3}{3},\ y_2=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{63},\ y_3=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{189\cdot 11}+\frac{x^{15}}{63^2\cdot 15}.$

3. $y_1=1+x^2,\ y_2=1+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5},\ y_3=1+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^5+$ $+\frac{13}{45}x^6+\frac{4}{63}x^7+\frac{1}{20}x^8+\frac{4}{135}x^9+\frac{x^{11}}{275}.$

4. $y_1=\frac{2}{3}x^{3/2},\ y_2=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{1}{9}x^4,\ y_3=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{1}{9}x^4+\frac{x^9}{729}+\frac{8x^{13/2}}{351}.$

5. $y_1=\frac{2}{3}x^{3/2},\ y_2=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{4}{21}x^{7/2},\ y_3=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{4}{21}x^{7/2}+\frac{8}{231}x^{11/2}.$

6. $y_1=\frac{x^2}{2},\ y_2=\frac{x^2}{2}+x\sin x-\frac{x^2}{2}\cos x+\cos x,\ y_3=\frac{3}{4}x^2+x\sin x+$ $+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{3}{8}x\sin 2x+\frac{2x^2-11}{16}\cos 2x.$

7. $y_1=\frac{x^2}{2},\ y_2=\frac{x^2}{2}+x\cos x+\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\sin x,\ y_3=\frac{3}{4}x^2+x\cos x+$ $+\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\sin x+\frac{3}{8}x\sin 2x-\frac{2x^2-11}{16}\cos 2x.$

9. $y_1=x,\ \ y_2=x+\frac{x^3}{2},\ \ y_3=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{8},\ z_1=1+\frac{x^2}{2},\ \ z_2=1+x^2+\frac{x^4}{8},$
$z_3=1+x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{x^6}{64}.$

10. $y_1=-x+\frac{x^2}{2},\ y_2=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{20},\ y_3=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^7}{252},$
$z_1=1+\frac{x^2}{2},\ z_2=1+\frac{x^3}{6},\ z_3=1+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{120}.$

11. $y_1=-0{,}5x,\quad y_2=-0{,}5x-0{,}25x^2,\quad y_3=-0{,}5x-0{,}25x^2+\frac{0{,}0125}{3}x^3,$
$z_1=0{,}5,\ z_2=0{,}5-0{,}125x^2,\ z_3=0{,}5-0{,}125x^2-\frac{0{,}125}{3}x^3+0{,}015625x^4+0{,}00625x^5.$

12. $y_1=\frac{x^2}{2},\ y_2=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}.$

13. $y_1=1+x+\frac{x^2}{2},\quad y_2=1+x+x^2+\frac{x^3}{6}.$

14. $y_1=2+x-\frac{2}{3}x^3,\ y_2=2+x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4.$

15. $y_1=2x-\ln x,\ y_2=2+\ln^2 x.$

16. $y=1-0{,}01x+1{,}9999x^2-0{,}0067x^3-0{,}0020x^5.$

17. $y=3x^{3/2}+0{,}225x^4+0{,}02077x^{13/2}+0{,}00056x^9.$

18. $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{7}x^{7/2}+\frac{1}{35}x^5+\frac{2}{455}x^{13/2}.$

§ 4

1. $y_1=1,\quad y_2=1{,}005000,\quad y_3=1{,}010025,\quad y_4=1{,}025175,\quad y_5=1{,}045679,$ $y_6=1{,}071821,\quad y_7=1{,}103976,\quad y_8=1{,}142615,\quad y_9=1{,}188320,\quad y_{10}=1{,}241794.$ 2. $y_1=0,\ y_2=0{,}001,\ y_3=0{,}005,\ y_4=0{,}014002,\ y_5=0{,}030022,\ y_6=0{,}055112,$ $y_7=0{,}091416,\quad y_8=0{,}141252,\quad y_9=0{,}207247,\quad y_{10}=0{,}292542.$ 3. $y_1=0{,}1,$ $y_2=0{,}2001,\ y_3=0{,}3009,\ y_4=0{,}40272,\ y_5=0{,}50920,\ y_5=0{,}62217,\ y_7=0{,}74539,$ $y_8=0{,}88428,\ y_9=1{,}04684,\ y_{10}=1{,}24547.$ 4. $y_1=1,\ y_2=0{,}99091,\ y_3=0{,}97530,$ $y_4=0{,}95520,\ y_5=0{,}93219,\ y_6=0{,}90754,\ y_7=0{,}88188,\ y_8=0{,}85598,\ y_9=0{,}83026,$ $y_{10}=0{,}80502.$

5. а)

β \ x	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
0,05	0,9050	0,7622	0,6596	0,5820	0,5210	0,4952
0,10	0,9100	0,7726	0,6722	0,5955	0,5348	0,5090
0,15	0,9150	0,7829	0,6848	0,6089	0,5483	0,5224
0,20	0,9200	0,7932	0,6972	0,6221	0,5616	0,5356
0,25	0,9250	0,8035	0,7097	0,6352	0,5748	0,5487
0,30	0,9300	0,8137	0,7220	0,6482	0,5878	0,5616
0,35	0,9350	0,8240	0,7344	0,6612	0,6008	0,5744
0,40	0,9400	0,8342	0,7483	0,6753	0,6144	0,5877

б)

β \ x	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
0,1	0,9600	0,8866	0,8219	0,7651	0,7151	0,6923
0,2	0,9700	0,9093	0,8513	0,7979	0,7457	0,7234
0,3	0,9800	0,9319	0,8805	0,8300	0,7827	0,7604
0,4	0,9900	0,9544	0,9094	0,8622	0,8161	0,7939

6.

Номер варианта \ x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1	0,4094	0,3474	0,3022	0,2675	0,2401
2	0,3709	0,2974	0,2496	0,2157	0,1901
3	0,4096	0,3479	0,3028	0,2684	0,2410
4	0,8189	0,6950	0,6045	0,5352	0,4806
5	0,4100	0,3491	0,3046	0,2705	0,2434
6	1,6377	1,3897	1,2086	1,0702	0,9609
7	1,2288	1,0452	0,9116	0,8087	0,7266
8	0,8198	0,6981	0,6092	0,5412	0,4871
9	1,2212	0,9108	0,7377	0,6254	0,5640
10	1,0948	0,8482	0,7012	0,5988	0,5273
11	1,6380	1,3908	1,2104	1,0727	0,9640
12	1,4836	1,1901	0,9984	0,8627	0,7609
13	0,4109	0,3514	0,3144	0,2768	0,2482
14	1,6390	1,3942	1,2155	1,0789	0,9705
15	1,6397	1,3963	1,2187	1,0825	1,9743
16	2,0496	1,7453	1,5233	1.3531	1,2190
17	1,6430	1,4050	1,2297	1,0940	0,9857
18	3.2793	2,7926	2,4372	2,1647	1,9486
19	0,6151	0,5244	0,4580	0,4073	0.3667
20	1,3451	1,0341	0,8483	0,7232	0,6330

7.

α	x \ β	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
0,2	0,2	0,1992	0,1989	0,1987	0.1984	0,1982
	0,4	0.3890	0.3857	0,3824	0,3791	0,3759
	0,6	0,5587	0,5470	0,5357	0,5248	0,5143
	0.8	0,7018	0,6763	0,6526	0,6306	0,6102
	1,0	0,8164	0,7738	0,7359	0,7020	0,6715
0,4	0,4	0.3917	0.3883	0,3850	0,3817	0,3785
	0,7	0,6490	0,6303	0,6126	0,5959	0,5801
	1,0	0,8541	0,8084	0,7677	0,7314	0,6989
0,6	0,5	0,4881	0,4810	0,4742	0,4675	0,4610
	1,0	0,8934	0,8444	0,8009	0,7621	0,7273
0,8	1,0	0,9346	0,8820	0,8355	0,7940	0,7569
1,0	1,0	0,9776	0,9213	0,8715	0,8272	0,7876

8.

	x	0,4	0,6	0,8	1,0		x	0,4	0,6	0,8	1,0
а)	y	−0,07841	−0,17202	−0,29507	−0,44005	б)	y	1,0064	1,0326	1,1042	1,2606
	z	0,96040	0,91200	0,84629	0,76520		z	1,1667	1,3965	1,7662	2,3460

9.

β \ x	0,6	1,0	β \ x	0,6	1,0	β \ x	0,6	1,0
25	0,6277 0,0103	0,8891 0,5677	33	0,6243 0,0433	0,8722 0,6261	41	0,6210 0,0760	0,8560 0,6828
26	0,6273 0,0144	0,8869 0,5751	34	0,6239 0,0474	0,8701 0,6333	42	0,6206 0,0801	0,8540 0,6897
27	0,6268 0,0186	0,8848 0,5825	35	0,6235 0,0515	0,8681 0,6405	43	0,6202 0,0841	0,8520 0,6967
28	0,6264 0,0227	0,8827 0,5898	36	0,6231 0,0556	0,8660 0,6476	44	0,6197 0,0882	0,8500 0,7036
29	0,6260 0,0268	0,8805 0,5971	37	0,6226 0,0597	0,8640 0,6547	45	0,6193 0,0923	0,8481 0,7105
30	0,6256 0,0310	0,8784 0,6044	38	0,6222 0,0638	0,8620 0,6617	46	0,6189 0,0963	0,8461 0,7173
31	0,6252 0,0351	0,8763 0,6117	39	0,6218 0,0679	0,8599 0,6688	47	0,6185 0,1003	0,8442 0,7241
32	0,6247 0,0392	0,8743 0,6189	40	0,6214 0,0719	0,8579 0,6758	48	0,6181 0,1044	0,8423 0,7300

10.

α	β \ x	0,5	1,0	α	β \ x	0,5	1,0	α	β \ x	0,5	1,0
2,00	0,25	0,58954 0,55978	0,57573 0,86672	2,50	0,25	0,52698 0,52552	0,50507 0,80035	3,00	0,25	0,47700 0,49801	0,45201 0,74977
	0,50	0,57307 0,56056	0,54210 0,87614		0,50	0,51345 0,52653	0,47903 0,80958		0,50	0,46563 0,49914	0,43105 0,75862
	0,75	0,55703 0,56132	0,51032 0,88526		0,75	0,50024 0,52752	0,45418 0,81860		0,75	0,45449 0,50026	0,41092 0,76731
	1,00	0,54142 0,56206	0,48035 0,89406		1,00	0,48733 0,52849	0,43053 0,82738		1,00	0,44359 0,50136	0,39162 0,77584
	1,25	0,52622 0,56279	0,45216 0,90253		1,25	0,47473 0,52944	0,40807 0,83592		1,25	0,43291 0,50244	0,37317 0,78419
2,25	0,25	0,55640 0,54165	0,53768 0,83109	2,75	0,25	0,50067 0,51105	0,47679 0,77349				
	0,50	0,54153 0,54256	0,50826 0,84046		0,50	0,48830 0,51214	0,45352 0,78254				
	0,75	0,52702 0,54346	0,48030 0,84957		0,75	0,47620 0,51320	0,43124 0,79141				
	1,00	0,51287 0,54433	0,45380 0,85841		1,00	0,46436 0,51424	0,40996 0,80008				
	1,25	0,49907 0,54518	0,42875 0,86696		1,25	0,45279 0,51527	0,38967 0,80855				

§ 5

1. 0,0451. **2.** 1,0047. **3.** 0,3181. **4.** 0,0412. **5.** 0,6842. **6.** 3,0042. **7.** 0,1098. **8.** 0,4647. **9.** 0,8032. **10.** 2,1911.

§ 6

1.

α	x \ β	—0,3	—0,1	0,1	0,3	0,5
1,00	0,2 0,4 0,6 0,8 1,0	0,1611 0,2579 0,3101 0,3327 0,3374	0,1625 0,2626 0,3184 0,3447 0,3530	0,1640 0,2673 0,3269 0,3572 0,3696	0,1656 0,2722 0,3358 0,3704 0,3872	0,1671 0,2772 0,3450 0,3841 0,4059
1,25	0,4 0,7 1,0	0,2428 0,2898 0,2897	0,2473 0,2995 0,3047	0,2519 0,3095 0,3206	0,2566 0,3200 0,3375	0,2614 0,3310 0,3555
1,50	0,5 1,0	0,2465 0,2540	0,2524 0,2684	0,2586 0,2838	0,2649 0,3003	0,2714 0,3178
1,75	1,0	0,2319	0,2461	0,2612	0,2774	0,2946
2,00	1,0	0,2252	0,2393	0,2543	0,2704	0,2877

2.

α	x \ β	—0,5	—0,3	—0,1	0,1	0,3
1,00	0,2 0,4 0,6 0,8 1,0	0,1802 0,3228 0,4324 0,5146 0,5748	0,1807 0,3259 0,4407 0,5306 0,6003	0,1812 0,3290 0,4495 0,5479 0,6286	0,1817 0,3322 0,4586 0,5666 0,6603	0,1822 0,3355 0,4683 0,5869 0,6962
1,25	0,4 0,7 1,0	0,2690 0,4085 0,5050	0,2711 0,4171 0,5243	0,2732 0,4262 0,5455	0,2754 0,4358 0,5689	0,2776 0,4459 0,5948
1,50	0,5 1,0	0,2769 0,4499	0,2796 0,4650	0,2825 0,4814	0,2854 0,4993	0,2884 0,5188
1,75	1,0	0,4053	0,4175	0,4306	0,4446	0,4599
2,00	1,0	0,3687	0,3786	0,3893	0,4007	0,4129

3.

α \ x	0,6	1,0	α \ x	0,6	1,0	α \ x	0,6	1,0
14	—0,0370	0,4814	22	—0,0037	0,5423	30	0,0292	0,6013
15	—0,0328	0,4891	23	0,0004	0,5498	31	0,0333	0,6085
16	—0,0286	0,4968	24	0,0045	0,5572	32	0,0374	0,6158
17	—0,0245	0,5045	25	0,0087	0,5647	33	0,0415	0,6229
18	—0,0203	0,5121	26	0,0128	0,5721	34	0,0456	0,6301
19	—0,0162	0,5197	27	0,0169	0,5794	35	0,0496	0,6372
20	—0,0120	0,5273	28	0,0210	0,5867	36	0,0537	0,6443
21	—0,0079	0,5348	29	0,0251	0,5940	37	0,0578	0,6514

§ 7

1. а) $y(1)=3,36$, б) $y(2)=0,80$, в) $y(1)=3,72$, $z(1)=2,72$.

2.

b	t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
1,0	0,1	0,09951	0,07122	0,05543	0,04536	0,03839	0,03327
	0,2	0,19615	0,14124	0,11012	0,09019	0,07635	0,06619
	0,3	0,28759	0,20891	0,16337	0,13396	0,11347	0,09840
1,8	0,1	0,09914	0,07096	0,05522	0,04519	0,03825	0,03315
	0,2	0,19330	0,13915	0,10849	0,08885	0,07522	0,06520
	0,3	0,27844	0,20206	0,15795	0,12950	0,10969	0,09511
2,6	0,1	0,9856	0,7054	0,05490	0,04493	0,03802	0,03295
	0,2	0,18886	0,13591	0,10595	0,08677	0,07345	0,06367
	0,3	0,26433	0,19154	0,14965	0,12267	0,10389	0,09008

3.

b	t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
1,0	0,1	0,09934	0,13865	0,17755	0,21595	0,25373	0,29085
	0,2	0,19498	0,26995	0,34225	0,41155	0,47769	0,54065
	0,3	0,28418	0,38933	0,48779	0,57943	0,66452	0,74360
1,4	0,1	0,07117	0,09953	0,12777	0,15587	0,18380	0,21153
	0,2	0,14086	0,19635	0,25103	0,30472	0,35727	0,40858
	0,3	0,20780	0,28831	0,36646	0,44189	0,51438	0,58386
1,8	0,1	0,05542	0,07755	0,09963	0,12166	0,14363	0,16552
	0,2	0,11005	0,15375	0,19714	0,24013	0,28265	0,32464
	0,3	0,16319	0,22744	0,29072	0,35283	0,41359	0,47288
2,2	0,1	0,04537	0,06350	0,08161	0,099699	0,11776	0,13578
	0,2	0,09025	0,12621	0,16202	0,19764	0,23305	0,26820
	0,3	0,13419	0,18739	0,24014	0,29231	0,34381	0,39456
2,6	0,1	0,03840	0,05376	0,06910	0,08443	0,09974	0,11504
	0,2	0,07647	0,10699	0,13743	0,16777	0,19800	0,22809
	0,3	0,11389	0,15920	0,20427	0,24904	0,29343	0,33741
3,0	0,1	0,03329	0,04660	0,05991	0,07321	0,08650	0,09978
	0,2	0,06634	0,09283	0,11928	0,14568	0,17201	0,19826
	0,3	0,09891	0,13834	0,17762	0,21673	0,25562	0,29427

4.

b	t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
1,0	0,1	0,09545	0,093588	0,09177	0,09001	0,08829	0,08661
	0,2	0,18328	0,17623	0,16956	0,16323	0,15723	0,15154
	0,3	0,26515	0,24999	0,23605	0,22321	0,21137	0,20043
1,4	0,1	0,13379	0,13118	0,12863	0,12615	0,12373	0,12138
	0,2	0,25774	0,24774	0,23829	0,22933	0,22085	0,21281
	0,3	0,37467	0,35289	0,33292	0,31457	0,29768	0,28211
1,8	0,1	0,17223	0,16885	0,16556	0,16236	0,15925	0,15621
	0,2	0,33287	0,31985	0,30755	0,29591	0,28489	0,27445
	0,3	0,48629	0,45753	0,43125	0,40716	0,38503	0,36467
2,2	0,1	0,21076	0,20662	0,20258	0,19866	0,19484	0,19112
	0,2	0,40869	0,39257	0,37735	0,36296	0,34936	0,33648
	0,3	0,60006	0,56397	0,53107	0,50100	0,47344	0,44813
2,6	0,1	0,24938	0,24447	0,23969	0,23503	0,23051	0,22610
	0,2	0,48520	0,46590	0,44769	0,43050	0,41426	0,39889
	0,3	0,71605	0,67225	0,63243	0,59613	0,56294	0,53250
3,0	0,1	0,28810	0,28241	0,27688	0,27149	0,26625	0,26115
	0,2	0,56241	0,53985	0,51859	0,49853	0,47960	0,46170
	0,3	0,83436	0,78243	0,73537	0,69258	0,65354	0,61782

5.

t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
0,1	0,09935	0,09907	0,09874	0,09835	0,09792	0,09744
0,2	0,19504	0,19290	0,19041	0,18757	0,18439	0,18090
0,3	0,28411	0,27743	0,26974	0,26111	0,25162	0,24135

6.

b	t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
1,0	0,1	0,092578	0,09063	0,08870	0,08677	0,08486	0,08295
	0,2	0,17087	0,16346	0,15616	0,14900	0,14200	0,13517
	0,3	0,23610	0,22043	0,20529	0,19076	0,17691	0,16383
1,8	0,1	0,094411	0,092442	0,09048	0,08853	0,086591	0,08464
	0,2	0,17759	0,16999	0,16252	0,15519	0,14801	0,14101
	0,3	0,24999	0,23378	0,21812	0,20309	0,18876	0,17522
2,6	0,1	0,09629	0,094297	0,09231	0,09034	0,08837	0,08642
	0,2	0,18466	0,17688	0,16922	0,16171	0,15435	0,14719
	0,3	0,26497	0,24821	0,23200	0,21644	0,20160	0,18757

7.

t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
0,1	0,09548	0,06910	0,05414	0,04450	0,03778	0,03282
0,2	0,18364	0,13437	0,10593	0,08742	0,07441	0,06478
0,3	0,26679	0,19694	0,15604	0,12919	0,11022	0,09610

8.

t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
0,1	0,09999	0,10013	0,10027	0,10040	0,10053	0,10067
0,2	0,19999	0,20105	0,20211	0,20318	0,20425	0,20534
0,3	0,29992	0,30345	0,30702	0,31065	0,31432	0,31806

9.

a	t \ b	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
2,0	0,1	1,21652 0,23511	1,26593 0,21685	1,31473 0,20478	1,36319 0,19623	1,41143 0,18989	1,45953 0,18503
	0,2	1,38034 0,40685	1,47783 0,37310	1,57325 0,35110	1,66758 0,33579	1,76131 0,32462	1,85474 0,31617
	0,3	1,50534 0,57712	1,65038 0,52953	1,79202 0,49901	1,93219 0,47810	2,07196 0,46306	2,21198 0,45184
2,5	0,1	1,20706 0,25570	1,25750 0,23271	1,30698 0,21750	1,35593 0,20675	1,40454 0,19878	1,45292 0,19267
	0,2	1,35237 0,44353	1,45342 0,40042	1,55137 0,37241	1,64762 0,35297	1,74291 0,33881	1,83767 0,32812
	0,3	1,46127 0,62791	1,61251 0,56626	1,75917 0,52699	1,90358 0,50020	2,04710 0,48101	2,19056 0,46673
3,0	0,1	1,19663 0,27661	1,24829 0,24876	1,29861 0,23036	1,34816 0,21737	1,39722 0,20775	1,44597 0,20037
	0,2	1,32428 0,48152	1,42877 0,42852	1,52938 0,39423	1,62773 0,37050	1,72475 0,35325	1,82099 0,34025
	0,3	1,42632 0,68102	1,58104 0,60438	1,73317 0,55583	1,87990 0,52287	2,02700 0,49934	2,17383 0,48188
3,5	0,1	1,18546 0,29787	1,23847 0,26504	1,28973 0,24338	1,33996 0,22811	1,38955 0,21680	1,43872 0,20814
	0,2	1,29878 0,52081	1,40561 0,45744	1,50847 0,41659	1,60880 0,38840	1,70753 0,36796	1,80528 0,35259
	0,3	1,40987 0,73566	1,56174 0,64359	1,71345 0,58541	1,86399 0,54603	2,01380 0,51800	2,16346 0,49727

10.

a	t \ b	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
2,0	0,1	1,13650 0,64576	1,13587 0,63125	1,13527 0,61745	1,13469 0,60430	1,13413 0,59176	1,13358 0,57979
	0,2	1,25010 0,77826	1,24782 0,74628	1,24569 0,71725	1,24369 0,69079	1,24182 0,66657	1,24006 0,64431
	0,3	1,33743 0,89249	1,33274 0,84199	1,32853 0,79807	1,32471 0,75951	1,32124 0,72536	1,31806 0,69490
2,5	0,1	1,09863 0,64408	1,09805 0,62961	1,09748 0,61584	1,09693 0,60271	1,09639 0,59020	1,09588 0,57825
	0,2	1,17473 0,77195	1,17258 0,74020	1,17057 0,71138	1,16870 0,68510	1,16695 0,66104	1,16530 0,63893
	0,3	1,23528 0,88030	1,23076 0,83046	1,22671 0,78709	1,22306 0,74900	1,21975 0,71527	1,21673 0,68518
3,0	0,1	1,05806 0,64212	1,05749 0,62768	1,05694 0,61394	1,05640 0,60084	1,05589 0,58836	1,05539 0,57643
	0,2	1,10686 0,76561	1,10476 0,73409	1,10281 0,70548	1,10099 0,67939	1,09928 0,65550	1,09768 0,63354
	0,3	1,15086 0,86917	1,14640 0,81995	1,14240 0,77711	1,13881 0,73947	1,13556 0,70613	1,13260 0,67664
3,5	0,1	1,02094 0,64023	1,02038 0,62582	1,01983 0,61210	1,01930 0,59904	1,01879 0,58658	1,01829 0,57468
	0,2	1,04931 0,75993	1,04722 0,72863	1,04527 0,70021	1,04345 0,67429	1,04175 0,65055	1,04016 0,62873
	0,3	1,08182 0,85962	1,07733 0,81093	1,07333 0,76855	1,06974 0,73130	1,06649 0,69830	1,06353 0,66885

11.

a	t \ b	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
2,0	0,1	0,68427 1,01614	0,68235 0,98056	0,68134 0,96104	0,68150 0,96312	0,68300 0,99197	0,68566 1,04688
	0,2	0,89997 1,04795	0,89232 0,98208	0,88804 0,94347	0,88835 0,94317	0,89480 1,00401	0,90792 1,14544
	0,3	1,15392 1,09630	1,13666 1,00440	1,12668 0,94865	1,12682 0,94485	1,14280 1,04729	1,17954 1,31929
2,5	0,1	0,69489 1,01660	0,69296 0,98103	0,69194 0,96152	0,69210 0,96362	0,69361 0,99251	0,69629 1,04745
	0,2	0,92661 1,05002	0,91886 0,98417	0,91454 0,94565	0,91487 0,94557	0,92141 1,00680	0,93469 1,14852
	0,3	1,20364 1,10154	1,18605 1,00968	1,17591 0,95423	1,17612 0,95121	1,19251 1,05553	1,22991 1,32768
3,0	0,1	0,70464 1,01703	0,70270 0,98146	0,70167 0,96195	0,70184 0,96407	0,70335 0,99300	0,70604 1,04797
	0,2	0,95146 1,05194	0,94363 0,98610	0,93927 0,94766	0,93961 0,94778	0,94624 1,00938	0,95966 1,15135
	0,3	1,25072 1,10645	1,23283 1,01463	1,22254 0,95945	1,22282 0,95717	1,23959 1,06325	1,27759 1,33543
3,5	0,1	0,71373 1,01742	0,71178 0,98185	0,71075 0,96236	0,71092 0,96451	0,71244 0,99346	0,71515 1,04845
	0,2	0,97498 1,05374	0,96707 0,98791	0,96266 0,94956	0,96302 0,94986	0,96973 1,01180	0,98329 1,15400
	0,3	1,29588 1,11110	1,27771 1,01933	1,26728 0,96441	1,26763 0,96284	1,28476 1,07057	1,32332 1,34271

12.

a	t \ b	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
2,0	0,1	0,53403 1,16116	0,53370 1,17512	0,53337 1,18908	0,53305 1,20302	0,53274 1,21695	0,53242 1,23087
	0,2	0,57946 1,34819	0,57832 1,37964	0,57721 1,41101	0,57615 1,44229	0,57512 1,47349	0,57413 1,50461
	0,3	0,63792 1,56754	0,63584 1,62119	0,63388 1,67456	0,63205 1,72767	0,63033 1,78054	0,62871 1,83319
2,5	0,1	0,53650 1,16134	0,53618 1,17535	0,53585 1,18935	0,53553 1,20333	0,53522 1,21731	0,53490 1,23127
	0,2	0,58932 1,34974	0,58818 1,38158	0,58708 1,41333	0,58601 1,44500	0,58498 1,47658	0,58399 1,50808
	0,3	0,66005 1,57329	0,65798 1,62835	0,65604 1,68314	0,65421 1,73766	0,65250 1,79194	0,65090 1,84600
3,0	0,1	0,53898 1,16152	0,53866 1,17557	0,53833 1,18961	0,53801 1,20365	0,53769 1,21767	0,53738 1,23168
	0,2	0,59918 1,35130	0,59804 1,38353	0,59694 1,41567	0,59588 1,44772	0,59485 1,47969	0,59386 1,51158
	0,3	0,68219 1,57916	0,68012 1,63567	0,67819 1,69191	0,67638 1,74787	0,67468 1,80360	0,67309 1,85909
3,5	0,1	0,54146 1,16169	0,54114 1,17580	0,54081 1,18988	0,54049 1,20396	0,54017 1,21803	0,53986 1,23208
	0,2	0,60903 1,35288	0,60790 1,38551	0,60680 1,41804	0,60574 1,45048	0,60471 1,48284	0,60373 1,51512
	0,3	0,70432 1,58515	0,70227 1,64315	0,70035 1,70086	0,69855 1,75831	0,69687 1,81550	0,69529 1,87246

13.

a	t \ b	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
2,0	0,1	0,95749 0,59814	0,96095 0,59826	0,96427 0,59834	0,96745 0,59849	0,97052 0,59860	0,97347 0,59871
	0,2	0,95840 0,69837	0,96896 0,69914	0,97889 0,69988	0,98828 0,70057	0,99719 0,70124	1,00566 0,70188
	0,3	0,99197 0,80785	1,01110 0,80993	1,02894 0,81189	1,04564 0,81375	1,06136 0,81552	1,07621 0,81720
2,5	0,1	0,95835 0,59854	0,96178 0,59866	0,96506 0,59878	0,96822 0,59889	0,97125 0,59900	0,97418 0,59911
	0,2	0,96271 0,70157	0,97299 0,70230	0,98268 0,70301	0,99186 0,70368	1,00057 0,70432	1,00887 0,70494
	0,3	1,00175 0,81790	1,02016 0,81984	1,03737 0,82168	1,05354 0,82342	1,06878 0,82508	1,08320 0,82666

13.

a	t \ b	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
3,0	0,1	0,95938 0,59904	0,96276 0,59916	0,96600 0,59927	0,96912 0,59938	0,97212 0,59949	0,97501 0,59959
	0,2	0,96757 0,70534	0,97755 0,70604	0,98698 0,70672	0,99592 0,70734	1,00442 0,70797	1,01253 0,70856
	0,3	1,01241 0,82948	1,03007 0,83128	1,04663 0,83298	1,06223 0,83461	1,07697 0,83615	1,09094 0,83764
3,5	0,1	0,96055 0,59961	0,96388 0,59973	0,96708 0,59984	0,97015 0,59995	0,97311 0,60006	0,97597 0,60016
	0,2	0,97284 0,70964	0,98251 0,71031	0,99166 0,71095	1,00036 0,71156	1,00864 0,71214	1,01655 0,71271
	0,3	1,02359 0,84234	1,04051 0,84400	1,05642 0,84558	1,07144 0,84709	1,08567 0,84853	1,09920 0,84991

§ 8

1. а) $y(0,5)=1,80$, б) $y(1)=3,15$, в) $y(0,5)=0,14$, г) $y(0,5)=3,15$, $z(0,5)=-3,15$, д) $y(0,5)=0,55$, $z(0,5)=-0,18$.

2.

x	0,3	0,5	0,8	1,0	x	1,3	1,5	1,8	2,0
а) б)	0,7645 0,7408	0,6511 0,6065	0,5146 0,4493	0,4388 0,3679	в)	−0,2676	−0,4242	−0,6450	−0,7895

3.

b	t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
1,0	0,4 0,5	0,37223 0,44921	0,27329 0,33360	0,21451 0,26298	0,17618 0,21638	0,14935 0,18360	0,12956 0,15936
1,8	0,4 0,5	0,35181 0,41189	0,25759 0,30414	0,20199 0,23923	0,16582 0,19666	0,14054 0,16678	0,12191 0,14472
2,6	0,4 0,5	0,32070 0,35561	0,23388 0,26050	0,18314 0,20431	0,15026 0,16774	0,12731 0,14217	0,11042 0,12332

4.

b	t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
1,0	0,4 0,5	0,36556 0,43883	0,49545 0,58896	0,61391 0,72299	0,72161 0,84281	0,81974 0,95059	0,90955 1,04831
1,4	0,4 0,5	0,27107 0,33012	0,37403 0,45294	0,47236 0,56841	0,56564 0,67624	0,65376 0,77668	0,73687 0,87024
1,8	0,4 0,5	0,21424 0,26278	0,29771 0,36397	0,37914 0,46171	0,45818 0,55551	0,53459 0,64515	0,60822 0,73058
2,2	0,4 0,5	0,17679 0,21774	0,24645 0,30293	0,31512 0,38637	0,38256 0,46770	0,44861 0,54668	0,51313 0,62316
2,6	0,4 0,5	0,15038 0,18570	0,20998 0,25896	0,26903 0,33124	0,32742 0,40234	0,38502 0,47206	0,44174 0,54027
3,0	0,4 0,5	0,13079 0,16181	0,18279 0,22594	0,23448 0,28949	0,28576 0,35233	0,33658 0,41432	0,38687 0,47538

5.

b	t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
1,0	0,4 0,5	0,34217 0,41512	0,31623 0,37593	0,29313 0,34217	0,27247 0,31289	0,25393 0,28733	0,23724 0,26491
1,4	0,4 0,5	0,48648 0,59444	0,44860 0,53616	0,41506 0,48649	0,38522 0,44374	0,35855 0,40668	0,33463 0,37433
1,8	0,4 0,5	0,63541 0,78230	0,58458 0,70262	0,53985 0,63542	0,50024 0,57809	0,46500 0,52871	0,43350 0,48584
2,2	0,4 0,5	0,78923 0,97944	0,72435 0,87574	0,66759 0,78924	0,61761 0,71609	0,57332 0,65352	0,53388 0,59949
2,6	0,4 0,5	0,94822 1,18669	0,86808 1,05599	0,79843 0,94824	0,73742 0,85792	0,68359 0,78122	0,63584 0,71537
3,0	0,4 0,5	1,11269 1,40497	1,01599 1,24391	0,93250 1,11272	0,85975 1,00378	0,79586 0,91194	0,73939 0,83355

6.

t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
0,4 0,5	0,36455 0,43534	0,35014 0,41002	0,33381 0,38190	0,31583 0,35155	0,29642 0,31952	0,27586 0,28638

7.

b	t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
1,0	0,4	0,28977	0,26394	0,23958	0,21692	0,19617	0,17755
	0,5	0,33352	0,29650	0,26268	0,23258	0,20668	0,18543
1,8	0,4	0,31256	0,28563	0,26022	0,23657	0,21490	0,19542
	0,5	0,36657	0,32772	0,29221	0,26056	0,23325	0,21076
2,6	0,4	0,33776	0,30966	0,28314	0,25844	0,23578	0,21539
	0,5	0,40402	0,36321	0,32590	0,29258	0,26378	0,23997

8.

t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
0,4	0,34690	0,25782	0,20508	0,17022	0,14549	0,12702
0,5	0,42579	0,31798	0,25364	0,21093	0,18051	0,15775

9.

t \ a	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
0,4	0,39967	0,40789	0,41632	0,42494	0,43378	0,44284
0,5	0,49900	0,51471	0,53100	0,54789	0,56540	0,58355

10.

a	t \ b	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
2,0	0,4	1,60942 0,75058	1,80319 0,69019	1,99356 0,65208	2,18344 0,62633	2,37452 0,60805	2,56783 0,59457
	0,5	1,71222 0,92917	1,95814 0,85677	2,20321 0,81178	2,45094 0,78178	2,70332 0,76073	2,96136 0,74536
2,5	0,4	1,56640 0,81378	1,76532 0,73478	1,96331 0,68536	2,16049 0,65219	2,35854 0,62875	2,55853 0,61153
	0,5	1,69215 1,00248	1,94406 0,90757	2,19860 0,84909	2,45662 0,81038	2,71909 0,78337	2,98644 0,76374
3,0	0,4	1,55043 0,87920	1,75005 0,78082	1,95134 0,71954	2,15343 0,67861	2,35688 0,64981	2,56232 0,62874
	0,5	1,73662 1,07599	1,97627 0,95902	2,23012 0,88689	2,49167 0,83930	2,75888 0,80622	3,03065 0,78226
3,5	0,4	1,58301 0,94404	1,76695 0,82723	1,96387 0,75413	2,16627 0,70534	2,37203 0,67110	2,58055 0,64610
	0,5	1,84136 1,14517	2,05502 1,00923	2,29670 0,92433	2,55306 0,86812	2,81791 0,82903	3,08795 0,80078

11

a	*b* / *t*	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
2,0	0,4	1,40782 0,98740	1,39991 0,91911	1,39308 0,86185	1,38710 0,81310	1,38182 0,77105	1,37711 0,73437
	0,5	1,47160 1,06510	1,45919 0,98085	1,44891 0,91233	1,44022 0,85539	1,43277 0,80725	1,42628 0,76594
2,5	0,4	1,28867 0,96970	1,28084 0,90263	1,27412 0,84637	1,26826 0,79844	1,26311 0,75709	1,25853 0,72102
	0,5	1,34232 1,04307	1,32961 0,96060	1,31918 0,89348	1,31045 0,83769	1,30301 0,79049	1,29658 0,75000
3,0	0,4	1,19431 0,95448	1,18645 0,88850	1,17972 0,83312	1,17389 0,78592	1,16878 0,74519	1,16426 0,70965
	0,5	1,24233 1,02483	1,22921 0,94388	1,21856 0,87795	1,20972 0,82313	1,20223 0,77675	1,19581 0,73693
3,5	0,4	1,11857 0,94174	1,11057 0,87667	1,10379 0,82204	1,09792 0,77547	1,09280 0,73526	1,08827 0,70016
	0,5	1,16310 1,00981	1,14945 0,93011	1,13848 0,86518	1,12946 0,81116	1,12188 0,76544	1,11541 0,72618

12.

a	*b* / *t*	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
2,0	0,4	1,45383 1,16303	1,42292 1,04841	1,40469 0,97820	1,40434 0,97321	1,43680 1,41105	1,51570 1,54772
	0,5	1,80870 1,25132	1,75982 1,11675	1,73074 1,03548	1,73001 1,03620	1,79072 1,31848	1,92798 1,75688
2,5	0,4	1,53580 1,17360	1,50408 1,05910	1,48545 0,98960	1,48533 0,98677	1,51910 1,16086	1,59958 1,56161
	0,5	1,93485 1,27030	1,88432 1,13614	1,85446 1,05655	1,85436 1,06261	1,91855 1,35978	2,05818 1,77489
3,0	0,4	1,61460 1,18361	1,58212 1,06925	1,56313 1,00046	1,56324 0,99971	1,59823 1,17962	1,68016 1,57445
	0,5	2,05790 1,28856	2,00582 1,15487	1,97524 1,07700	1,97578 1,08841	2,04324 1,39862	2,18498 1,79182
3,5	0,4	1,69119 1,19323	1,65800 1,07902	1,63867 1,01092	1,63899 1,01221	1,67516 1,19761	1,75842 1,58648
	0,5	2,17908 1,30632	2,12553 1,17315	2,09429 1,09707	2,09547 1,11387	2,16605 1,43544	2,30971 1,80798

13.

a	t \ b	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
2,0	0,4	0,71165 1,82771	0,70884 1,90995	0,70628 1,99162	0,70395 2,07277	0,70183 2,15346	0,69989 2,23372
	0,5	0,80286 2,13997	0,79966 2,25966	0,79683 2,37840	0,79432 2,49630	0,79207 2,61345	0,79005 2,72994
2,5	0,4	0,75103 1,84285	0,74825 1,92882	0,74573 2,01421	0,74344 2,09908	0,74135 2,18346	0,73945 2,26742
	0,5	0,86456 2,17316	0,86144 2,30104	0,85868 2,42794	0,85623 2,55397	0,85404 2,67924	0,85207 2,80383
3,0	0,4	0,79042 1,85852	0,78768 1,94836	0,78519 2,03751	0,78294 2,12632	0,78089 2,21454	0,77903 2,30233
	0,5	0,92629 2,20801	0,92325 2,34450	0,92056 2,47998	0,91818 2,61457	0,91604 2,74838	0,91412 2,88149
3,5	0,4	0,82982 1,87472	0,82712 1,96857	0,82467 2,06181	0,82246 2,15450	0,82045 2,24670	0,81862 2,33844
	0,5	0,98805 2,24453	0,98508 2,39004	0,98247 2,53453	0,98014 2,67810	0,98706 2,82087	0,97619 2,96293

14.

a	t \ b	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
2,0	0,4	1,05138 0,93160	1,07983 0,93564	1,10617 0,93943	1,13072 0,94302	1,15370 0,94641	1,17531 0,94963
	0,5	1,13213 1,07299	1,17028 1,07961	1,20546 1,08582	1,23812 1,09166	1,26859 1,09719	1,29717 1,10243
2,5	0,4	1,06798 0,95334	1,09509 0,95701	1,12031 0,96048	1,14388 0,96377	1,16601 0,96689	1,18688 0,96986
	0,5	1,15642 1,11145	1,19252 1,11736	1,22597 1,12293	1,25715 1,12819	1,28635 1,13319	1,31381 1,13795
3,0	0,4	1,08558 0,97782	1,11136 0,98116	1,13544 0,98436	1,15802 0,98731	1,17929 0,99017	1,19940 0,99290
	0,5	1,18166 1,15403	1,21578 1,15930	1,24755 1,16429	1,27727 1,16903	1,30519 1,17354	1,33153 1,17784
3,5	0,4	1,10363 1,00450	1,12814 1,00752	1,15112 1,01039	1,17273 1,01313	1,19314 1,01574	1,21249 1,01824
	0,5	1,20714 1,19976	1,23940 1,20447	1,26956 1,20895	1,29787 1,21321	1,32456 1,21728	1,34981 1,22118

15. а) $y(0{,}2)=0{,}55691$, б) $y(0{,}2)=0{,}18498$, $z(0{,}2)=0{,}83644$, в) $y(0{,}2)=1{,}21706$, $z(0{,}2)=-0{,}97715$.

§ 9

1.

α \ x	1,3	1,5	1,8	2,0	α \ x	1,3	1,5	1,8	2,0
0,50	0,6761	0,5017	0,3285	0,2550	3,25	0,7533	0,6346	0,5022	0,4356
0,75	0,7046	0,5468	0,3803	0,3048	3,50	0,7544	0,6368	0,5056	0,4396
1,00	0,7197	0,5725	0,4129	0,3377	3,75	0,7554	0,6387	0,5087	0,4432
1,25	0,7291	0,5892	0,4353	0,3612	4,00	0,7562	0,6403	0,5114	0,4464
1,50	0,7355	0,6008	0,4516	0,3787	4,25	0,7570	0,6418	0,5138	0,4492
1,75	0,7401	0,6094	0,4640	0,3923	4,50	0,7576	0,6432	0,5159	0,4518
2,00	0,7436	0,6160	0,4737	0,4032	4,75	0,7582	0,6444	0,5179	0,4541
2,25	0,7464	0,6213	0,4816	0,4120	5,00	0,7588	0,6454	0,5196	0,4562
2,50	0,7486	0,6255	0,4881	0,4194	5,25	0,7593	0,6464	0,5213	0,4581
2,75	0,7504	0,6291	0,4935	0,4256	5,50	0,7597	0,6473	0,5227	0,4598
3,00	0,7520	0,6320	0,4982	0,4310					

2.

α \ x	0,3	0,5	0,8	1,0	α \ x	0,3	0,5	0,8	1,0
0,20	2,4329	3,2747	4,2835	4,7477	0,31	1,9086	2,4241	3,0108	3,2547
0,21	2,3626	3,1606	4,1127	4,5473	0,32	1,8788	2,3758	2,9384	3,1699
0,22	2,2986	3,0568	3,9574	4,3652	0,33	1,8509	2,3304	2,8705	3,0902
0,23	2,2402	2,9620	3,8156	4,1989	0,34	1,8245	2,2877	2,8066	3,0152
0,24	2,1867	2,8752	3,6857	4,0464	0,35	1,7997	2,2474	2,7463	2,9445
0,25	2,1374	2,7953	3,5661	3,9062	0,36	1,7762	2,2093	2,6894	2,8777
0,26	2,0920	2,7215	3,4558	3,7767	0,37	1,7540	2,1733	2,6355	2,8145
0,27	2,0499	2,6532	3,3536	3,6569	0,38	1,7330	2,1392	2,5845	2,7547
0,28	2,0108	2,5898	3,2587	3,5456	0,39	1,7131	2,1069	2,5361	2,6979
0,29	1,9744	2,5308	3,1703	3,4419	0,40	1,6941	2,0761	2,4901	2,6440
0,30	1,9404	2,4757	3,0879	3,3452					

§ 10

1.

a	b \ x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
1,0	1,0	0,05110	0,10377	0,15706	0,21005	0,26193
	1,4	0,05162	0,10590	0,16196	0,21886	0,27580
	1,8	0,05214	0,10809	0,16705	0,22816	0,29063
	2,2	0,05268	0,11034	0,17235	0,23798	0,30650
	2,6	0,05322	0,11265	0,17788	0,24834	0,32349
	3,0	0,05376	0,11503	0,18363	0,25929	0,34168
1,4	1,0	0,05102	0,10318	0,15510	0,20557	0,25360
	1,4	0,05154	0,10530	0,15995	0,21424	0,26715
	1,8	0,05207	0,10748	0,16499	0,22338	0,28164
	2,2	0,05260	0,10972	0,17024	0,23304	0,29714
	2,6	0,05314	0,11202	0,17571	0,24324	0,31375
	3,0	0,05368	0,11438	0,18141	0,25401	0,33155

a	*x* / *b*	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
1,8	1,0	0,05094	0,10249	0,15285	0,20050	0,24436
	1,4	0,05145	0,10460	0,15764	0,20901	0,25757
	1,8	0,05198	0,10677	0,16263	0,2180	0,27171
	2,2	0,05251	0,10900	0,16782	0,22749	0,28686
	2,6	0,05305	0,11128	0,17324	0,23751	0,30308
	3,0	0,05359	0,11364	0,17887	0,24810	0,32048
2,2	1,0	0,05084	0,10170	0,15032	0,19490	0,23440
	1,4	0,05135	0,10380	0,15505	0,20326	0,24727
	1,8	0,05188	0,10596	0,15998	0,21208	0,26106
	2,2	0,05241	0,10817	0,16512	0,22140	0,27584
	2,6	0,05294	0,11045	0,17047	0,23125	0,29168
	3,0	0,05349	0,11279	0,17604	0,24165	0,30868
2,6	1,0	0,05072	0,10082	0,14753	0,18887	0,22389
	1,4	0,05124	0,10291	0,15221	0,19706	0,23643
	1,8	0,05176	0,10505	0,15708	0,20572	0,24987
	2,2	0,05229	0,10725	0,16215	0,21486	0,26429
	2,6	0,05283	0,10952	0,16744	0,22453	0,27975
	3,0	0,05337	0,11184	0,17295	0,23474	0,29635
3,0	1,0	0,05060	0,09986	0,14451	0,18247	0,21304
	1,4	0,05111	0,10193	0,14912	0,19050	0,22527
	1,8	0,05163	0,10406	0,15393	0,19898	0,23834
	2,2	0,05216	0,10624	0,15894	0,20795	0,25240
	2,6	0,05270	0,10849	0,16416	0,21743	0,26749
	3,0	0,05324	0,11080	0,16960	0,22746	0,28370

2.

1,0	1,0	0,01886	0,03864	0,05937	0,08104	0,10367
	1,4	0,01905	0,03944	0,06123	0,08448	0,10925
	1,8	0,01924	0,04026	0,06317	0,08811	0,11522
	2,2	0,01944	0,04110	0,06519	0,09195	0,12162
	2,6	0,01964	0,04196	0,06729	0,09600	0,12848
	3,0	0,01984	0,04285	0,06949	0,10029	0,13584
1,4	1,0	0,01264	0,02691	0,03983	0,05441	0,06967
	1,4	0,01277	0,02645	0,04108	0,05672	0,07342
	1,8	0,01290	0,02700	0,04238	0,05916	0,07744
	2,2	0,01303	0,02756	0,04374	0,06174	0,08174
	2,6	0,01316	0,02814	0,04515	0,06446	0,08636
	3,0	0,01330	0,02873	0,04662	0,06734	0,09131

a	b \ x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
1,8	1,0	0,00847	0,01737	0,02672	0,03652	0,04678
	1,4	0,00856	0,01773	0,02755	0,03806	0,04930
	1,8	0,00865	0,01810	0,02843	0,03970	0,05200
	2,2	0,00874	0,01848	0,02934	0,04143	0,05480
	2,6	0,00882	0,01887	0,03028	0,04326	0,05799
	3,0	0,00892	0,01927	0,03127	0,04519	0,06132
2,2	1,0	0,00568	0,01165	0,01792	0,02449	0,03140
	1,4	0,00574	0,01189	0,01848	0,02554	0,03309
	1,8	0,00580	0,01214	0,01906	0,02663	0,03490
	2,2	0,00586	0,01239	0,01967	0,02779	0,03684
	2,6	0,00592	0,01265	0,02031	0,02902	0,03892
	3,0	0,00598	0,01292	0,02097	0,03032	0,04115
2,6	1,0	0,00381	0,00781	0,01201	0,01643	0,02106
	1,4	0,00385	0,00797	0,01239	0,01712	0,02220
	1,8	0,00388	0,00814	0,01278	0,01786	0,02341
	2,2	0,00392	0,00830	0,01319	0,01864	0,02471
	2,6	0,00396	0,00848	0,01362	0,01946	0,02611
	3,0	0,00401	0,00866	0,01406	0,02033	0,02761
3,0	1,0	0,00255	0,00523	0,00805	0,01101	0,01412
	1,4	0,00258	0,00534	0,00831	0,01148	0,01489
	1,8	0,00260	0,00545	0,00857	0,01198	0,01570
	2,2	0,00263	0,00557	0,00884	0,01250	0,01657
	2,6	0,00266	0,00568	0,00913	0,01305	0,01751
	3,0	0,00268	0,00580	0,00943	0,01363	0,01852

3.

a	x			
	0,05	0,10	0,15	0,20
1,8	0,99775	0,99104	0,97995	0,96464
2,0	0,99750	0,99005	0,97775	0,96079

4.

a	x	k			
		1	2	3	4
1,0	0,05 0,10 0,15 0,20	—0,00119 —0,00455 —0,00982 —0,01678	—0,0004 —0,00033 —0,00140 —0,00257	0,00000 —0,00002 —0,00013 —0,00040	0,00000 0,00000 —0,00002 —0,00006
1,3	0,05 0,10 0,15 0,20	—0,00153 —0,00577 —0,01232 —0,02086	—0,00005 —0,00043 —0,00142 —0,00330	0,00000 —0,00003 —0,00016 —0,00051	0,00000 0,00000 —0,00002 —0,00008
1,6	0,05 0,10 0,15 0,20	—0,00185 —0,00693 —0,01465 —0,02461	—0,00007 —0,00052 —0,00174 —0,00401	0,00000 —0,00004 —0,00020 —0,00063	0,00000 0,00000 —0,00002 —0,00010

Глава IX

§ 3

1.

	x								
Номер варианта	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
а)	1,10	1,25	1,44	1,67	2,01	2,22	2,33	2,25	1,86
б)	1,17	1,31	1,42	1,50	1,64	1,66	1,63	1,58	1,49
в)	1,59	1,68	1,75	1,81	1,97	2,03	2,09	2,17	2,27

2.

j	x	a				
		0,70	0,75	0,80	0,85	0,90
1	0,2 0,4 0,6 0,8	0,20261 0,31383 0,31995 0,21436	0,20249 0,31358 0,31959 0,21406	0,20237 0,31331 0,31922 0,21375	0,20224 0,31303 0,31882 0,21341	0,20211 0,31273 0,31840 0,21306
2	0,2 0,4 0,6 0,8	0,20504 0,31583 0,31972 0,21231	0,20492 0,31558 0,31936 0,21201	0,20480 0,31530 0,31899 0,21170	0,20467 0,31501 0,31859 0,21136	0,20453 0,31471 0,31817 0,21101
3	0,2 0,4 0,6 0,8	0,20721 0,31756 0,31944 0,21046	0,20709 0,31729 0,31908 0,21016	0,20696 0,31702 0,31870 0,20985	0,20682 0,31672 0,31830 0,20952	0,20668 0,31641 0,31788 0,20917
4	0,2 0,4 0,6 0,8	0,20915 0,31905 0,31913 0,20879	0,20902 0,31878 0,31877 0,20850	0,20889 9,31850 0,31839 0,20818	0,20875 0,31821 0,31798 0,20785	0,20861 0,31789 0,31756 0,20751
5	0,2 0,4 0,6 0,8	0,21089 0,32036 0,31879 0,20727	0,21077 0,32009 0,31843 0,20698	0,21064 0,31980 0,31805 0,20667	0,21049 0,31950 0,31764 0,20634	0,21035 0,31918 0,31722 0,20600

3. а)

a	*x*	*b*					
		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
1,0	0,2	—0,19423	—0,18510	—0,17703	—0,16984	—0,16339	—0,15759
	0,4	—0,24802	—0,23242	—0,21869	—0,20653	—0,19571	—0,18600
	0,6	—0,20214	—0,18541	—0,17096	—0,15841	—0,14745	—0,13782
	0,8	—0,10519	—0,09429	—0,08518	—0,07750	—0,07098	—0,06541
1,4	0,2	—0,20076	—0,19096	—0,18231	—0,17462	—0,16776	—0,16158
	0,4	—0,24773	—0,23161	—0,21745	—0,20495	—0,19384	—0,18391
	0,6	—0,19496	—0,17823	—0,16382	—0,15133	—0,14045	—0,13092
	0,8	—0,09782	—0,08724	—0,07843	—0,07103	—0,06477	—0,05945
1,8	0,2	—0,20620	—0,19576	—0,18657	—0,17842	—0,17116	—0,16465
	0,4	—0,24537	—0,22885	—0,21438	—0,20163	—0,19032	—0,18024
	0,6	—0,18622	—0,16962	—0,15536	—0,14304	—0,13234	—0,12299
	0,8	—0,09001	—0,07983	—0,07137	—0,06430	—0,05835	—0,05331
2,2	0,2	—0,21039	—0,19936	—0,18969	—0,18113	—0,17351	—0,16670
	0,4	—0,24097	—0,22420	—0,20953	—0,19664	—0,18524	—0,17509
	0,6	—0,17618	—0,15984	—0,14585	—0,13380	—0,12336	—0,11426
	0,8	—0,08202	—0,07228	—0,06423	—0,57524	—0,05191	—0,04717

б)

a	*x*	*b*					
		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
1,0	0,2	—0,00925	—0,00782	—0,00677	—0,00597	—0,00534	—0,00483
	0,4	—0,01673	—0,01415	—0,01227	—0,01082	—0,00968	—0,00876
	0,6	—0,01914	—0,01623	—0,01409	—0,01245	—0,01115	—0,01010
	0,8	—0,01394	—0,01187	—0,01033	—0,00915	—0,00821	—0,00744
1,4	0,2	—0,00964	—0,00815	—0,00705	—0,00622	—0,00556	—0,00503
	0,4	—0,01743	—0,01474	—0,01278	—0,01127	—0,01009	—0,00913
	0,6	—0,01990	—0,01687	—0,01465	—0,01294	—0,01159	—0,01050
	0,8	—0,01445	—0,01230	—0,01071	—0,00948	—0,00850	—0,00771
1,8	0,2	—0,01006	—0,00850	—0,00736	—0,00649	—0,00581	—0,00525
	0,4	—0,01818	—0,01538	—0,01333	—0,01176	—0,01052	—0,00952
	0,6	—0,02072	—0,01757	—0,01526	—0,01348	—0,01207	—0,01093
	0,8	—0,01500	—0,01277	—0,01111	—0,00984	—0,00883	—0,00800
2,2	0,2	—0,01053	—0,00889	—0,00771	—0,00679	—0,00608	—0,00549
	0,4	—0,01901	—0,01608	—0,01393	—0,01230	—0,01100	—0,00996
	0,6	—0,02162	—0,01834	—0,01592	—0,01406	—0,01260	—0,01141
	0,8	—0,01560	—0,01328	—0,01155	—0,01023	—0,00917	—0,00832

в)

a	x	b = 2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
1,0	0,2	—0,03325	—0,02791	—0,02406	—0,02114	—0,01885	—0,01701
	0,4	—0,04938	—0,04155	—0,03586	—0,03154	—0,02816	—0,02542
	0,6	—0,04778	—0,04080	—0,03485	—0,0307	—0,02743	—0,02479
	0,8	—0,03018	—0,02552	—0,02212	—0,01951	—0,01746	—0,01580
1,4	0,2	—0,03217	—0,02714	—0,02348	—0,02069	—0,01849	—0,01672
	0,4	—0,04718	—0,03994	—0,03464	—0,03058	—0,02737	—0,02477
	0,6	—0,04484	—0,03811	—0,03314	—0,02932	—0,02630	—0,02384
	0,8	—0,02777	—0,02369	—0,02067	—0,01833	—0,01647	—0,01495
1,8	0,2	—0,03122	—0,02646	—0,02297	—0,02029	—0,01818	—0,01646
	0,4	—0,04528	—0,03854	—0,03357	—0,02974	—0,02669	—0,02422
	0,6	—0,04242	—0,03630	—0,03174	—0,02819	—0,02536	—0,02305
	0,8	—0,02599	—0,02234	—0,01959	—0,01745	—0,01574	—0,01433
2,2	0,2	—0,03053	—0,02598	—0,02261	—0,02002	—0,01797	—0,01630
	0,4	—0,04387	—0,03754	—0,03282	—0,02915	—0,02623	—0,02384
	0,6	—0,04082	—0,03511	—0,03082	—0,02746	—0,02477	—0,02256
	0,8	—0,02503	—0,02162	—0,01903	—0,01700	—0,01536	—0,01401

г)

a	x	b = 2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
1,0	0,2	—0,03077	—0,03040	—0,03011	—0,02988	—0,02969	—0,02953
	0,4	—0,05324	—0,05285	—0,05255	—0,05230	—0,05210	—0,05193
	0,6	—0,05964	—0,05944	—0,05929	—0,05917	—0,05907	—0,05899
	0,8	—0,04358	—0,04359	—0,04359	—0,04360	—0,04361	—0,04361
1,4	0,2	—0,03229	—0,03187	—0,03158	—0,03133	—0,03112	—0,03095
	0,4	—0,05579	—0,05537	—0,05504	—0,05478	—0,05456	—0,05437
	0,6	—0,06233	—0,06211	—0,06195	—0,06181	—0,06170	—0,06160
	0,8	—0,04535	—0,04535	—0,04535	—0,04535	—0,04536	—0,04536
1,8	0,2	—0,03395	—0,03352	—0,03318	—0,03292	—0,03269	—0,03251
	0,4	—0,05860	—0,05814	—0,05778	—0,05749	—0,05726	—0,05705
	0,6	—0,06528	—0,06504	—0,06485	—0,06470	—0,06458	—0,06447
	0,8	—0,04729	—0,04728	—0,04727	—0,04727	—0,04727	—0,04727
2,2	0,2	—0,03579	—0,03532	—0,03496	—0,03467	—0,03443	—0,03423
	0,4	—0,06169	—0,06119	—0,06080	—0,06048	—0,06023	—0,06000
	0,6	—0,06853	—0,06826	—0,06806	—0,06789	—0,06775	—0,06763
	0,8	—0,04942	—0,04940	—0,04939	—0,04938	—0,04938	—0,04937

§ 5

1. $y=2+c_1\sin x+c_2(\cos x+1)+c_3\sin 2x+c_4(\cos 2x-1)$.

а) $c_1=80/63$, $c_2=-8/9$, $c_3=-2/9$, $c_4=-20/63$, б) $c_1=152/63$, $c_2=1/9$, $c_3=-2/9$, $c_4=-38/63$, в) $c_1=17/7$, $c_2=c_3=0$, $c_4=-6/7$.

Указание. В качестве базисных функций взять систему (5.12).

2. $y = x + c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x)$.

а) $c_1 = -5/2$, $c_2 = 119/52$, б) $c_1 = -3/2$, $c_2 = 77/52$, в) $c_1 = -5/2$, $c_2 = 117/52$, г) $c_1 = -3/4$, $c_2 = 89/52$.

Указание. В качестве базисных функций взять следующие функции: $u_0 = x$, $u_1 = x^2 - 2x$, $u_2 = x^3 - 3x$.

§ 6

1. $y = c_1 x(x-1) + c_2 x^2 (x-1)$.

а) $c_1 = 0{,}195$, $c_2 = 0{,}364$, б) $c_1 = 0{,}059$, $c_2 = 0{,}204$, в) $c_1 = 0{,}162$, $c_2 = 0{,}118$, г) $c_1 = 0{,}465$, $c_2 = -0{,}133$, д) $c_1 = 0{,}171$, $c_2 = 0{,}187$.

Указание. Использовать следующие базисные функции: $u_1 = x(x-1)$, $u_2 = x^2(x-1)$, и точки коллокации $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$.

2. $y = x + c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x) + c_3(x^4 - 4x)$.

а) $c_1 = 0{,}088$, $c_2 = -0{,}170$, $c_3 = 0{,}090$, б) $c_1 = 0{,}967$, $c_2 = -1{,}573$, $c_3 = 0{,}775$, в) $c_1 = 0{,}858$, $c_2 = -1{,}018$, $c_3 = 0{,}420$.

Указание. Использовать следующие базисные функции: $u_0 = x$, $u_1 = x^2 - 2x$, $u_2 = x^3 - 3x$, $u_3 = x^4 - 4x$, и точки коллокации $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}75$.

Глава X

§ 2

1. Значения решения в точках p, q, r, s (см. рис. 8) приведены в таблице.

α	β	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
0,9	p	15,20	15,25	15,30	15,35	15,40
	q	20,53	20,69	20,84	20,99	21,14
	r	25,09	25,24	25,39	25,53	25,68
	s	14,12	14,17	14,22	14,27	14,32
1,0	p	16,32	16,37	16,42	16,47	16,52
	q	21,10	21,26	21,41	21,56	21,71
	r	26,24	26,39	26,53	26,68	26,83
	s	15,14	15,18	15,23	15,28	15,33
1,1	p	17,44	17,50	17,54	17,60	17,65
	q	21,67	21,82	21,98	22,13	22,28
	r	27,39	27,53	27,68	27,83	27,98
	s	16,15	16,20	16,25	16,30	16,35

§ 3

2. $\alpha = 0{,}9$, $\beta = 1{,}01$

8,26	15,71	24,01	30,65	35,05
7,53	14,47	20,59	24,94	27,10
7,52	14,13	19,07	21,46	21,33
8,60	15,63	20,23	20,56	17,65
11,38	19,71	25,72	22,96	16,22

$\alpha = 0{,}9$, $\beta = 1{,}03$

8,29	15,78	24,14	30,95	35,15
7,58	14,55	20,74	25,12	27,20
7,57	14,23	19,21	21,62	21,44
8,64	15,72	20,36	20,74	17,81
11,41	19,77	25,83	23,20	16,32

$\alpha = 0{,}9,\ \beta = 1{,}05$

8,32	15,85	24,27	31,25	35,25
7,63	14,65	20,88	25,30	27,29
7,62	14,33	19,35	21,77	21,54
8,69	15,81	20,50	20,91	17,97
11,44	19,83	25,94	23,44	16,42

$\alpha = 1{,}0,\ \beta = 1{,}01$

8,58	16,57	24,54	31,11	35,48
7,90	15,11	21,27	25,70	28,27
7,85	14,70	19,70	22,06	21,86
8,93	16,28	20,78	21,00	17,93
11,74	20,81	26,20	23,22	16,35

$\alpha = 1{,}0,\ \beta = 1{,}03$

8,61	16,64	24,68	31,41	35,58
7,94	15,21	21,42	25,89	28,39
7,91	14,81	19,85	22,23	21,97
8,98	16,38	20,93	21,19	18,09
11,77	20,87	26,32	23,47	16,46

$\alpha = 1{,}0,\ \beta = 1{,}05$

8,64	16,71	24,82	31,72	35,68
7,99	15,31	21,58	26,08	28,50
7,96	14,92	20,01	22,40	22,08
9,03	16,48	21,08	21,37	18,26
11,80	20,94	26,44	23,72	16,56

$\alpha = 1{,}10,\ \beta = 1{,}01$

8,92	17,48	25,16	31,67	35,96
8,31	15,88	22,10	26,60	29,56
8,30	15,40	20,45	22,80	22,45
9,31	16,98	21,43	21,52	18,25
12,11	21,94	26,73	23,53	16,51

$\alpha = 1{,}10,\ \beta = 1{,}03$

8,95	17,56	25,31	31,99	36,07
8,36	15,99	22,27	26,81	29,67
8,36	15,52	20,62	22,99	22,58
9,36	17,09	21,60	21,73	18,42
12,14	22,01	26,86	23,79	16,62

$\alpha = 1{,}10,\ \beta = 1{,}05$

8,97	17,58	25,36	32,18	36,11
8,68	16,00	22,29	26,86	29,69
8,36	15,59	20,71	23,05	22,62
9,43	17,22	21,71	21,85	18,55
12,20	22,09	26,96	24,01	16,70

Указание. Использовать ответы к задаче 1 § 2.

3.

а)

	1	2	
1	1,333	1,667	2
2	1,667	1,333	1
	2	1	

б)

	0	0	1	
0	0,1875	0,5000	1,8750	2
0	0,2500	0,6250	1,2500	2
0	0,1875	0,5000	1,8750	2
	0	0	1	

в)

	0	0	0	
5	2,634	1,250	0,491	0
10	4,286	1,875	0,714	0
5	2,634	1,250	0,491	0
	0	0	0	

4.

	0	0	0	0	0	0	0	
2,5000	1,8731	1,3400	0,9281	0,6247	0,4041	0,2405	0,1120	0
5,0000	3,6525	2,5588	1,7479	1,1668	0,7513	0,4461	0,2074	0
7,5000	5,1782	3,4950	2,3380	1,5436	0,9882	0,5851	0,2717	0
10,0000	6,0654	3,9052	2,5656	1,6814	1,0730	0,6344	0,2945	0
7,5000	5,1782	3,4951	2,3380	1,5436	0,9883	0,5851	0,2718	0
5,0000	3,6525	2,5589	1,7480	1,1670	0,7514	0,4461	0,2075	0
2,5000	1,8731	1,3401	0,9282	0,6248	0,4042	0,2406	0,1120	0
	0	0	0	0	0	0	0	

§ 4

1.

1,0	0					
0,9	0	0,888				
0,8	0	0,704	1,384			
0,7	0	0,544	1,064			
0,6	0	0,408	0,792	1,128		
0,5	0	0,296	0,568	0,792		
0,4	0	0,208	0,392	0,528		
0,3	0	0,144	0,264	0,336	0,336	
0,2	0	0,104	0,184	0,216	0,176	
0,1	0	0,088	0,152	0,168	0,112	
0	0	0,096	0,168	0,192	0,144	0
y \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

Примечание. В ответе указаны значения точного решения задачи $u = 12xy^2 + x(1 - 4x^2 - 2y)$.

2. а)

y \ x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
1,0	6,000	6,120	6,480										
0,8	5,088	5,184	5,472	5,952	6,624	7,488	8,544						
0,6	3,984	4,056	4,272	4,632	5,136	5,784	6,576	7,512	8,592				
0,4	2,736	2,784	2,800	3,168	3,504	3,936	4,464	5,088	5,808	6,624	7,536		
0,2	1,392	1,416	1,488	1,608	1,776	1,992	2,076	2,568	2,928	3,336	3,792	4,316	4,848
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

П р и м е ч а н и е. В ответе указаны значения точного решения задачи $u = y(3x^2 - y^2 + 7)$. Ввиду симметрии решения дается половина таблицы при $x \geqslant 0$.

б)

y \ x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
1,0	0	0,792	1,536										
0,8	0	0,816	1,584	2,256	2,784	3,120	3,216						
0,6	0	0,888	1,728	2,472	3,072	3,480	3,648	3,528	3,072				
0,4	0	1,008	1,968	2,832	3,552	4,080	4,368	4,368	4,032	3,312	2,160		
0,2	0	1,176	2,304	3,336	4,224	4,920	5,376	5,544	5,376	4,824	3,840	2,376	0,384
0	0	1,392	2,736	3,984	5,088	6,000	6,672	7,056	7,104	6,768	6,000	4,752	1,976

П р и м е ч а н и е. В ответе указаны значения точного решения задачи $u = x(7 - 6y + 3y^2 - x^2)$ при $x \geqslant 0$. Значения функции $u(x, y)$ при $x < 0$ легко получить, учитывая ее нечетность по x.

§ 5

1. $a = 1,1$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
1,1	0,020	0,31065	0,60232	0,85466	1,04521	1,14988	1,14460	1,01787	0,76358	0,41201
	0,015	0,31969	0,62129	0,88494	1,08803	1,20549	1,21172	1,08370	0,82401	0,44346
	0,010	0,32821	0,63939	0,91437	1,13049	1,26168	1,28049	1,16177	0,88692	0,48625
	0,005	0,33607	0,65641	0,94271	1,17234	1,31826	1,35103	1,24272	0,97251	0,53111
	0,000	0,34315	0,67213	0,96967	1,21330	1,37500	1,42322	1,32705	1,06222	0,61797
1,2	0,020	0,33592	0,65039	0,92084	1,12302	1,23171	1,22244	1,08410	0,81171	0,43732
	0,015	0,34627	0,67184	0,95452	1,16984	1,29153	1,29358	1,15335	0,87463	0,47007
	0,010	0,35615	0,69254	0,98753	1,21650	1,35214	1,36655	1,23501	0,94014	0,51426
	0,005	0,36544	0,71229	1,01963	1,26277	1,41337	1,44151	1,31973	1,02851	0,56055
	0,000	0,37404	0,73088	1,05055	1,30838	1,47500	1,51836	1,40802	1,12110	0,64900
1,3	0,020	0,36119	0,69847	0,98702	1,20083	1,31354	1,30028	1,15034	0,85984	0,46263
	0,015	0,37284	0,72239	1,02410	1,25165	1,37756	1,37543	1,22299	0,92526	0,49668
	0,010	0,38409	0,74569	1,06069	1,30252	1,44260	1,45261	1,30825	0,99337	0,54226
	0,005	0,39482	0,76817	1,09655	1,35321	1,50848	1,53199	1,39674	1,08451	0,58999
	0,000	0,40492	0,78964	1,13142	1,40347	1,57500	1,61349	1,48899	1,17999	0,68004
1,4	0,020	0,38647	0,74655	1,05320	1,27864	1,39537	1,37812	1,21658	0,90796	0,48794
	0,015	0,39942	0,77294	1,09368	1,33346	1,46360	1,45728	1,29263	0,97588	0,52330
	0,010	0,41203	0,79883	1,13385	1,38853	1,53306	1,53867	1,38150	1,04659	0,57026
	0,005	0,42419	0,82405	1,17347	1,44365	1,60359	1,62248	1,47375	1,14052	0,61943
	0,000	0,43581	0,84839	1,21230	1,49855	1,67500	1,70863	1,56995	1,23887	0,71108
1,5	0,020	0,41174	0,79463	1,11938	1,35645	1,47720	1,45595	1,28282	0,95609	0,51325
	0,015	0,42599	0,82349	1,16326	1,41527	1,54964	1,53913	1,36227	1,02650	0,54991
	0,010	0,43997	0,85198	1,20701	1,47455	1,62352	1,62473	1,45474	1,09982	0,59826
	0,005	0,45357	0,87993	1,25039	1,53408	1,69870	1,71296	1,55076	1,19652	0,64887
	0,000	0,46670	0,90714	1,29317	1,59364	1,77500	1,80376	1,65092	1,29775	0,74212

$a = 1,3$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
1,1	0,020	0,31658	0,61567	0,87769	1,07963	1,19528	1,19703	1,07046	0,80616	0,43629
	0,015	0,32467	0,63315	0,90667	1,12223	1,25259	1,26833	1,14146	0,87259	0,47086
	0,010	0,33200	0,64935	0,93431	1,16400	1,31016	1,34119	1,22651	0,94173	0,51866
	0,005	0,33842	0,66400	0,96028	1,20462	1,36772	1,41570	1,31466	1,03732	0,56880
	0,000	0,34377	0,67683	0,98423	1,24372	1,42500	1,49172	1,40640	1,13759	0,66825
1,2	0,020	0,34185	0,66375	0,94387	1,15744	1,27711	0,27487	1,13670	0,85429	0,46160
	0,015	0,35125	0,68370	0,97625	1,20404	1,33863	0,35019	1,21110	0,92321	0,49748
	0,010	0,35994	0,70249	1,00747	1,25001	1,40062	0,42725	1,29975	0,99495	0,54666
	0,005	0,36779	0,71988	1,03720	1,29505	1,46283	0,50618	1,39166	1,09333	0,59824
	0,000	0,37465	0,73558	1,06511	1,33881	1,52500	0,58685	1,48737	1,19647	0,69929
1,3	0,020	0,36713	0,71183	1,01005	1,23525	1,35894	1,35270	1,20293	0,90241	0,48692
	0,015	0,37782	0,73425	1,04584	1,28585	1,42467	1,43204	1,28074	0,97383	0,52409
	0,010	0,38788	0,75564	1,08062	1,33603	1,49108	1,51331	1,37300	1,04817	0,57466
	0,005	0,39717	0,77576	1,11412	1,38549	1,55794	1,59667	1,46867	1,14933	0,62768
	0,000	0,40554	0,79434	1,14598	1,43390	1,62500	1,68199	1,56833	1,25535	0,73032

Продолжение

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
1,4	0,020	0,39240	0,75991	1,07623	1,31306	1,44078	1,43054	1,26917	0,95054	0,51223
	0,015	0,40440	0,78480	1,11542	1,36766	1,51071	1,51389	1,35038	1,02445	0,55070
	0,010	0,41582	0,80879	1,15378	1,42204	1,58154	1,59937	1,44624	1,10140	0,60267
	0,005	0,42654	0,83164	1,19104	1,47593	1,65305	1,68715	1,54568	1,20533	0,65712
	0,000	0,43643	0,85309	1,22685	1,52898	1,72500	1,77712	1,64930	1,31424	0,76136
1,5	0,020	0,41768	0,80798	1,14241	1,39087	1,52261	1,50838	1,33541	0,99867	0,53754
	0,015	0,43097	0,83535	1,18500	1,44947	1,59674	1,59574	1,42003	1,07508	0,57731
	0,010	0,44376	0,86194	1,22694	1,50806	1,67200	1,68543	1,51948	1,15462	0,63067
	0,005	0,45592	0,88752	1,26796	1,56636	1,74816	1,77763	1,62269	1,26133	0,68656
	0,000	0,46731	0,91184	1,30773	1,62407	1,82500	1,87226	1,73027	1,37312	0,79240

$a = 1,5$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
1,1	0,020	0,32251	0,62903	0,90073	1,11405	1,24069	1,24945	1,12305	0,84874	0,46058
	0,015	0,32965	0,64502	0,92841	1,15644	1,29970	1,32495	1,19921	0,92116	0,49827
	0,010	0,33579	0,65930	0,95424	1,19751	1,35863	1,40189	1,29126	0,99653	0,55107
	0,005	0,34077	0,67159	0,97784	1,23689	1,41718	1,48037	1,38659	1,10214	0,60648
	0,000	0,34439	0,68153	0,99879	1,27415	1,47500	1,56022	1,48575	1,21296	0,71853
1,2	0,020	0,34778	0,67711	0,96691	1,19186	1,32252	1,32729	1,18929	0,89687	0,48589
	0,015	0,35623	0,69557	0,99799	1,23825	1,38574	1,40680	1,26885	0,97178	0,52488
	0,010	0,36373	0,71245	1,02740	1,28353	1,44909	1,48795	1,36450	1,04976	0,57907
	0,005	0,37014	0,72747	1,05476	1,32733	1,51229	1,57086	1,46360	1,15814	0,63592
	0,000	0,37527	0,74028	1,07966	1,36924	1,57500	1,65535	1,56671	1,27184	0,74957
1,3	0,020	0,37306	0,72519	1,03309	1,26967	1,40435	1,40513	1,25553	0,94499	0,51120
	0,015	0,38280	0,74612	1,06757	1,32006	1,47177	1,48865	1,33849	1,02241	0,55149
	0,010	0,39167	0,76560	1,10056	1,36954	1,53955	1,57400	1,43774	1,10298	0,60707
	0,005	0,39952	0,78335	1,13168	1,41777	1,60741	1,66134	1,54060	1,21414	0,66536
	0,000	0,40616	0,79904	1,16054	1,46432	1,67500	1,75049	1,64768	1,33072	0,78061
1,4	0,020	0,39833	0,77326	1,09927	1,34748	1,48618	1,48297	1,32176	0,99312	0,53651
	0,015	0,40937	0,79666	1,13715	1,40187	1,55781	1,57050	1,40814	1,07303	0,57810
	0,010	0,41961	0,81875	1,17372	1,45556	1,63001	1,66006	1,51099	1,15621	0,63507
	0,005	0,42890	0,83923	1,20860	1,50820	1,70252	1,75182	1,61761	1,27015	0,69480
	0,000	0,43704	0,85779	1,24141	1,55941	1,77500	1,84562	1,72865	1,38960	0,81164
1,5	0,020	0,42361	0,82134	1,16544	1,42529	1,56801	1,56081	1,38800	1,04125	0,56183
	0,015	0,43595	0,84721	1,20673	1,48367	1,64385	1,65235	1,47778	1,12365	0,60472
	0,010	0,44755	0,87190	1,24687	1,54157	1,72047	1,74612	1,58423	1,20943	0,66307
	0,005	0,45827	0,89511	1,28552	1,59864	1,79763	1,84231	1,69462	1,32615	0,72424
	0,000	0,46793	0,91654	1,32228	1,65450	1,87500	1,94076	1,80962	1,44849	0,84268

2. $a=\pi/12$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}	u_{10j}
0,1	0,020	0,02526	0,05032	0,07503	0,09926	0,12297	0,14614	0,16877	0,19099	0,21286	0,23456
	0,015	0,02537	0,05053	0,07528	0,09954	0,12325	0,14639	0,16902	0,19115	0,21296	0,23456
	0,010	0,02550	0,05073	0,07555	0,09982	0,12353	0,14668	0,16925	0,19137	0,21305	0,23456
	0,005	0,02564	0,05100	0,07583	0,10010	0,12381	0,14696	0,16954	0,19154	0,21320	0,23456
	0,000	0,02590	0,05127	0,07610	0,10038	0,12410	0,14725	0,16983	0,19183	0,21325	0,23456
0,2	0,020	0,02443	0,04848	0,07191	0,09447	0,11610	0,13681	0,15663	0,17576	0,19430	0,21260
	0,015	0,02462	0,04886	0,07235	0,09496	0,11659	0,13724	0,15704	0,17601	0,19448	0,21260
	0,010	0,02487	0,04924	0,07285	0,09545	0,11707	0,13772	0,15741	0,17636	0,19461	0,21260
	0,005	0,02513	0,04975	0,07335	0,09595	0,11756	0,13820	0,15788	0,17662	0,19484	0,21260
	0,000	0,02565	0,05026	0,07385	0,09644	0,11805	0,13868	0,15835	0,17708	0,19489	0,21260
0,3	0,020	0,02363	0,04672	0,06894	0,08993	0,10966	0,12813	0,14539	0,16176	0,17736	0,19264
	0,015	0,02390	0,04726	0,06955	0,09061	0,11031	0,12870	0,14594	0,16209	0,17759	0,19264
	0,010	0,02427	0,04780	0,07025	0,09130	0,11097	0,12933	0,14642	0,16254	0,17776	0,19264
	0,005	0,02463	0,04853	0,07096	0,09198	0,11163	0,12997	0,14703	0,16288	0,17805	0,19264
	0,000	0,02539	0,04926	0,07167	0,09266	0,11229	0,13060	0,14764	0,16347	0,17812	0,19264
0,4	0,020	0,02286	0,04503	0,06610	0,08564	0,10360	0,12003	0,13501	0,14891	0,16190	0,17450
	0,015	0,02320	0,04572	0,06687	0,08649	0,10441	0,12072	0,13565	0,14930	0,16216	0,17450
	0,010	0,02367	0,04640	0,06776	0,08733	0,10521	0,12148	0,13623	0,14982	0,16236	0,17450
	0,005	0,02414	0,04734	0,06866	0,08818	0,10601	0,12224	0,13695	0,15022	0,16270	0,17450
	0,000	0,02514	0,04829	0,06955	0,08903	0,10681	0,12299	0,13766	0,15090	0,16279	0,17450
0,5	0,020	0,02212	0,04341	0,06340	0,08157	0,09792	0,11248	0,12540	0,13710	0,14779	0,15804
	0,015	0,02253	0,04423	0,06430	0,08257	0,09884	0,11327	0,12612	0,13754	0,14808	0,15804
	0,010	0,02310	0,04505	0,06537	0,08356	0,09976	0,11412	0,12677	0,13812	0,14830	0,15804
	0,005	0,02367	0,04619	0,06643	0,08455	0,10068	0,11498	0,12756	0,13857	0,14867	0,15804
	0,000	0,02489	0,04733	0,06750	0,08554	0,10160	0,11583	0,12835	0,13930	0,14878	0,15804

$a = \pi/4$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}	u_{10}
0,1	0,020	0,07490	0,14879	0,22087	0,29033	0,35672	0,42037	0,48047	0,53939	0,59574	0,65206
	0,015	0,07541	0,14980	0,22217	0,29193	0,35849	0,42152	0,48224	0,53943	0,59655	0,65206
	0,010	0,07602	0,15082	0,22359	0,29353	0,36027	0,42345	0,48276	0,54103	0,59609	0,65206
	0,005	0,07663	0,15204	0,22501	0,29514	0,36205	0,42540	0,48485	0,54013	0,59721	0,65206
	0,000	0,07764	0,15326	0,22643	0,29675	0,36384	0,42735	0,48695	0,54236	0,59330	0,65206
0,2	0,020	0,07244	0,14338	0,21172	0,27638	0,33692	0,39422	0,44711	0,49965	0,54914	0,59936
	0,015	0,07320	0,14488	0,21356	0,27855	0,33920	0,39530	0,44923	0,49892	0,55007	0,59936
	0,010	0,07415	0,14639	0,21561	0,28073	0,34149	0,39768	0,44910	0,50079	0,54875	0,59936
	0,005	0,07511	0,14830	0,21767	0,28292	0,34379	0,40007	0,45156	0,49813	0,55001	0,59936
	0,000	0,07687	0,15023	0,21974	0,28512	0,34610	0,40246	0,45403	0,50066	0,54224	0,59936
0,3	0,020	0,07007	0,13819	0,20300	0,26318	0,31833	0,36970	0,41597	0,46230	0,50522	0,54931
	0,015	0,07105	0,14015	0,20532	0,26585	0,32104	0,37081	0,41835	0,46112	0,50624	0,54931
	0,010	0,07234	0,14211	0,20795	0,26854	0,32376	0,37354	0,41787	0,46317	0,50438	0,54931
	0,005	0,07363	0,14467	0,21059	0,27123	0,32648	0,37628	0,42060	0,45945	0,50574	0,54931
	0,000	0,07610	0,14725	0,21325	0,27394	0,32922	0,37903	0,42334	0,46217	0,49557	0,54931
0,4	0,020	0,06779	0,13321	0,19469	0,25069	0,30087	0,34673	0,38695	0,42736	0,46410	0,50225
	0,015	0,06898	0,13559	0,19744	0,25380	0,30393	0,34794	0,38953	0,42596	0,46518	0,50225
	0,010	0,07057	0,13797	0,20060	0,25692	0,30700	0,35093	0,38888	0,42812	0,46303	0,50225
	0,005	0,07217	0,14114	0,20377	0,26005	0,31008	0,35394	0,39179	0,42382	0,46444	0,50225
	0,000	0,07534	0,14433	0,20694	0,26320	0,31316	0,35695	0,39472	0,42663	0,45291	0,50225
0,5	0,020	0,06560	0,12844	0,18677	0,23885	0,28446	0,32523	0,35994	0,39480	0,42583	0,45834
	0,015	0,06698	0,13120	0,18990	0,24235	0,28781	0,32657	0,36265	0,39332	0,42694	0,45834
	0,010	0,06886	0,13396	0,19354	0,24585	0,29116	0,32976	0,36197	0,39554	0,42466	0,45834
	0,005	0,07074	0,13771	0,19718	0,24936	0,29452	0,33296	0,36500	0,39098	0,42609	0,45834
	0,000	0,07459	0,14148	0,20083	0,25288	0,29789	0,33617	0,36803	0,39383	0,41393	0,45834

$a = \pi/3$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}	u_{10j}
0,1	0,020	0,09884	0,19589	0,28962	0,37859	0,46178	0,54004	0,61150	0,68143	0,74635	0,81170
	0,015	0,09975	0,19768	0,29202	0,38156	0,46515	0,54200	0,61494	0,68110	0,74792	0,81170
	0,010	0,10079	0,19950	0,29458	0,38455	0,46854	0,54574	0,61545	0,68413	0,74654	0,81170
	0,005	0,10185	0,20159	0,29715	0,38757	0,47196	0,54952	0,61953	0,68138	0,74873	0,81170
	0,000	0,10344	0,20369	0,29974	0,39060	0,47540	0,55331	0,62364	0,68571	0,73913	0,81170
0,2	0,020	0,09560	0,18878	0,27768	0,36048	0,43629	0,50721	0,57042	0,63499	0,69413	0,75584
	0,015	0,09683	0,19121	0,28074	0,36414	0,44023	0,50843	0,57418	0,63242	9,69579	0,75584
	0,010	0,09832	0,19365	0,28409	0,36783	0,44419	0,51262	0,57267	0,63574	0,69217	0,75584
	0,005	0,09983	0,19664	0,28747	0,37154	0,44819	0,51684	0,57706	0,62849	0,69443	0,75584
	0,000	0,10241	0,19966	0,29088	0,37529	0,45221	0,52109	0,58147	0,63302	0,67551	0,75584
0,3	0,020	0,09249	0,18197	0,26629	0,34335	0,41234	0,47624	0,53175	0,59033	0,64321	0,69999
	0,015	0,09400	0,18497	0,26995	0,34761	0,41675	0,47708	0,53573	0,58642	0,64493	0,69999
	0,010	0,09592	0,18800	0,27403	0,35190	0,42119	0,48160	0,53296	0,58986	0,63988	0,69999
	0,005	0,09785	0,19183	0,27814	0,35622	0,42566	0,48616	0,53755	0,57977	0,64217	0,69999
	0,000	0,10139	0,19571	0,28228	0,36057	0,43016	0,49074	0,54216	0,58435	0,61737	0,69999
0,4	0,020	0,08948	0,17544	0,25544	0,32713	0,38984	0,44711	0,49546	0,54781	0,59429	0,64544
	0,015	0,09126	0,17897	0,25962	0,33190	0,39463	0,44778	0,49958	0,54313	0,59603	0,64544
	0,010	0,09358	0,18252	0,26436	0,33672	0,39945	0,45255	0,49611	0,54662	0,59016	0,64544
	0,005	0,09592	0,18716	0,26913	0,34156	0,40430	0,45734	0,50080	0,53487	0,59243	0,64544
	0,000	0,10038	0,19183	0,27394	0,34643	0,40918	0,46217	0,50551	0,53943	0,56424	0,64544
0,5	0,020	0,08659	0,16918	0,24509	0,31176	0,36869	0,41974	0,46149	0,50762	0,54781	0,59305
	0,015	0,08861	0,17319	0,24974	0,31699	0,37379	0,42040	0,46569	0,50258	0,54955	0,59305
	0,010	0,09131	0,17723	0,25507	0,32225	0,37890	0,42533	0,46189	0,50605	0,54327	0,59305
	0,005	0,09402	0,18261	0,26044	0,32753	0,38405	0,43028	0,46660	0,49350	0,54550	0,59305
	0,000	0,09938	0,18803	0,26584	0,33285	0,38922	0,43525	0,47133	0,49795	0,51567	0,59305

3.

a	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
0,00	0,020	0,02597	0,05383	0,07778	0,10631	0,10901	0,12072	0,09074	0,07601	0,03354
	0,015	0,02473	0,05194	0,08294	0,10361	0,12969	0,11440	0,11175	0,06709	0,04028
	0,010	0,02345	0,04945	0,08043	0,11643	0,12680	0,14295	0,10200	0,08055	0,03218
	0,005	0,02155	0,04690	0,07735	0,11395	0,15550	0,13965	0,13040	0,06435	0,03070
	0,000	0,01960	0,04310	0,07420	0,11160	0,15370	0,19940	0,12560	0,06140	0,00310
0,02	0,020	0,02847	0,06008	0,08778	0,11006	0,12401	0,11697	0,10074	0,06976	0,03604
	0,015	0,02973	0,05694	0,09044	0,11861	0,12969	0,12940	0,10425	0,07209	0,03528
	0,010	0,02345	0,05945	0,09043	0,12143	0,14680	0,13795	0,11200	0,07055	0,03218
	0,005	0,03155	0,04690	0,08735	0,13395	0,15550	0,15965	0,12040	0,06435	0,02070
	0,000	0,01960	0,06310	0,07420	0,11160	0,19370	0,19940	0,12560	0,04140	0,00310
0,04	0,020	0,03097	0,06633	0,09778	0,11381	0,13901	0,11322	0,11074	0,06351	0,03854
	0,015	0,03473	0,06194	0,09794	0,13361	0,12969	0,14440	0,09675	0,07709	0,03028
	0,010	0,02345	0,06945	0,10043	0,12643	0,16680	0,13295	0,12200	0,06055	0,03218
	0,005	0,04155	0,04690	0,09735	0,15395	0,15550	0,17965	0,11040	0,06435	0,01070
	0,000	0,01960	0,08310	0,07420	0,11160	0,23370	0,19940	0,12560	0,02140	0,00310
0,06	0,020	0,03347	0,07258	0,10778	0,11756	0,15401	0,10947	0,12074	0,05726	0,04104
	0,015	0,03973	0,06694	0,10544	0,14861	0,12969	0,15940	0,08925	0,08209	0,02528
	0,010	0,02345	0,07945	0,11043	0,13143	0,18680	0,12795	0,13200	0,05055	0,03218
	0,005	0,05155	0,04690	0,10735	0,17395	0,15550	0,19965	0,10040	0,06435	0,00070
	0,000	0,01960	0,10310	0,07420	0,11160	0,27370	0,19940	0,12560	0,00140	0,00310
0,08	0,020	0,03597	0,07883	0,11778	0,12131	0,16901	0,10572	0,13074	0,05101	0,04354
	0,015	0,04473	0,07194	0,11294	0,16361	0,12969	0,17440	0,08175	0,08709	0,02028
	0,010	0,02345	0,08945	0,12042	0,13643	0,20680	0,12295	0,14200	0,04055	0,03218
	0,005	0,06155	0,04690	0,11735	0,19395	0,15550	0,21965	0,09040	0,06435	-0,00930
	0,000	0,01960	0,12310	0,07420	0,11160	0,31370	0,19940	0,12560	—0,01860	0,00310
0,10	0,020	0,03847	0,08508	0,12778	0,12506	0,18401	0,10197	0,14074	0,04476	0,04604
	0,015	0,04973	0,07694	0,12044	0,17861	0,12969	0,18940	0,07425	0,09209	0,01528
	0,010	0,02345	0,09945	0,13043	0,14143	0,22680	0,11795	0,15200	0,03055	0,03218
	0,005	0,07155	0,04690	0,12735	0,21395	0,15550	0,23965	0,08040	0,06435	-0,01930
	0,000	0,01960	0,14310	0,07420	0,11160	0,35370	0,19940	0,12560	—0,03860	0,00310

4. $a=1,1$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
2,1	0,0067	1,92797	1,77385	1,64444	1,53796	1,45027	1,37748	1,31642	1,26440	1,21896
	0,0050	1,92459	1,76948	1,64058	1,53485	1,44780	1,37555	1,31492	1,26329	1,21832
	0,0033	1,92066	1,76487	1,63672	1,53176	1,44535	1,37363	1,31343	1,26216	1,21763
	0,0017	1,91597	1,76010	1,63287	1,52869	1,44292	1,37172	1,31195	1,26104	1,21689
	0,0000	1,91011	1,75536	1,62906	1,52565	1,44051	1,36983	1,31049	1,25992	1,21605
2,2	0,0067	2,01893	1,85625	1,71902	1,60545	1,51132	1,43273	1,36641	1,30962	1,25984
	0,0050	2,01545	1,85176	1,71504	1,60222	1,50876	1,43070	1,36482	1,30844	1,25915
	0,0033	2,01142	1,84702	1,71104	1,59902	1,50621	1,42869	1,36325	1,30725	1,25842
	0,0017	2,00660	1,84211	1,70708	1,59584	1,50367	1,42670	1,36169	1,30604	1,25761
	0,0000	2,00060	1,83723	1,70314	1,59268	1,50116	1,42472	1,36015	1,30485	1,25671

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
2,3	0,0067	2,10988	1,93866	1,79360	1,67293	1,57238	1,48798	1,41640	1,35485	1,30072
	0,0050	2,10631	1,93404	1,78949	1,66959	1,56971	1,48586	1,41473	1,35360	1,29999
	0,0033	2,10218	1,92917	1,78537	1,66627	1,56706	1,48376	1,41308	1,35233	1,29920
	0,0017	2,09724	1,92412	1,78128	1,66298	1,56443	1,48167	1,41143	1,35105	1,29834
	0,0000	2,09108	1,91910	1,77722	1,65971	1,56182	1,47960	1,40981	1,34978	1,29736
2,4	0,0067	2,20084	2,02106	1,86817	1,74041	1,63344	1,54323	1,46639	1,40008	1,34160
	0,0050	2,19718	2,01632	1,86394	1,73696	1,63067	1,54102	1,46464	1,39876	1,34082
	0,0033	2,19294	2,01131	1,85970	1,73353	1,62792	1,53882	1,46290	1,39741	1,33998
	0,0017	2,18787	2,00613	1,85549	1,73013	1,62518	1,53664	1,46118	1,39606	1,33906
	0,0000	2,18156	2,00098	1,85130	1,72674	1,62247	1,53448	1,45946	1,39472	1,33802
2,5	0,0067	2,29179	2,10347	1,94275	1,80789	1,69450	1,59848	1,51638	1,44531	1,38248
	0,0050	2,28804	2,09859	1,93840	1,80432	1,69163	1,59617	1,51455	1,44391	1,38165
	0,0033	2,28369	2,09346	1,93403	1,80078	1,68877	1,59388	1,51272	1,44250	1,38076
	0,0017	2,27851	2,08814	1,92970	1,79727	1,68594	1,59161	1,51092	1,44107	1,37979
	0,0000	2,27205	2,08285	1,92539	1,79378	1,68312	1,58936	1,50912	1,43965	1,37868

$a = 1{,}3$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
2,1	0,0067	1,93123	1,78173	1,65869	1,55994	1,48082	1,41699	1,36489	1,32160	1,28451
	0,0050	1,92758	1,77705	1,65459	1,55669	1,47829	1,41505	1,36344	1,32056	1,28392
	0,0033	1,92334	1,77211	1,65050	1,55347	1,47578	1,41313	1,36199	1,31951	1,28331
	0,0017	1,91827	1,76699	1,64643	1,55027	1,47330	1,41123	1,36057	1,31847	1,28265
	0,0000	1,91192	1,76191	1,64239	1,54710	1,47084	1,40935	1,35915	1,31743	1,28191
2,2	0,0067	2,02218	1,86413	1,73326	1,62742	1,54188	1,47224	1,41488	1,36683	1,32539
	0,0050	2,01844	1,85933	1,72905	1,62406	1,53925	1,47021	1,41334	1,36572	1,32476
	0,0033	2,01410	1,85426	1,72483	1,62072	1,53664	1,46820	1,41182	1,36460	1,32409
	0,0017	2,00890	1,84900	1,72064	1,61741	1,53405	1,46620	1,41031	1,36347	1,32337
	0,0000	2,00241	1,84378	1,71648	1,61413	1,53149	1,46423	1,40881	1,36237	1,32257
2,3	0,0067	2,11314	1,94654	1,80784	1,69490	1,60293	1,52748	1,46487	1,41205	1,36627
	0,0050	2,10931	1,94160	1,80350	1,69143	1,60020	1,52536	1,46325	1,41087	1,36559
	0,0033	2,10486	1,93640	1,79916	1,68798	1,59749	1,52326	1,46164	1,40968	1,36487
	0,0017	2,09954	1,93101	1,79484	1,68456	1,59481	1,52118	1,46005	1,40848	1,36410
	0,0000	2,09289	1,92565	1,79056	1,68116	1,59214	1,51911	1,45847	1,40730	1,36323
2,4	0,0067	2,20409	2,02894	1,88242	1,76238	1,66399	1,58273	1,51486	1,45728	1,40715
	0,0050	2,20017	2,02388	1,87795	1,75880	1,66116	1,58052	1,51316	1,45603	1,40642
	0,0033	2,19562	2,01855	1,87348	1,75524	1,65835	1,57832	1,51147	1,45476	1,40565
	0,0017	2,19017	2,01302	1,86905	1,75170	1,65556	1,57615	1,50979	1,45349	1,40482
	0,0000	2,18337	2,00753	1,86464	1,74819	1,65280	1,57399	1,50813	1,45223	1,40389
2,5	0,0067	2,29505	2,11135	1,95699	1,82986	1,72505	1,63798	1,56485	1,50251	1,44802
	0,0050	2,29103	2,10616	1,95241	1,82616	1,72212	1,63568	1,56307	1,50118	1,44726
	0,0033	2,28637	2,10070	1,94781	1,82249	1,71921	1,63339	1,56129	1,49984	1,44644
	0,0017	2,28080	2,09503	1,94325	1,81885	1,71632	1,63112	1,55953	1,49850	1,44555
	0,0000	2,27386	2,08940	1,93872	1,81523	1,71345	1,62887	1,55779	1,49716	1,44454

$a=1,5$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
2,1	0,0067	1,93448	1,78961	1,67293	1,58192	1,51137	1,45649	1,41337	1,37880	1,35005
	0,0050	1,93057	1,78461	1,66861	1,57853	1,50878	1,45455	1,41196	1,37783	1,34952
	0,0033	1,92602	1,77935	1,66428	1,57518	1,50622	1,45264	1,41056	1,37686	1,34898
	0,0017	1,92056	1,77388	1,65999	1,57185	1,50368	1,45074	1,40918	1,37590	1,34840
	0,0000	1,91373	1,76846	1,65573	1,56855	1,50116	1,44886	1,40782	1,37495	1,34778
2,2	0,0067	2,02544	1,87201	1,74751	1,64940	1,57243	1,51174	1,46336	1,42403	1,39093
	0,0050	2,02144	1,86689	1,74306	1,64590	1,56974	1,50971	1,46186	1,42299	1,39036
	0,0033	2,01678	1,86149	1,73861	1,64243	1,56707	1,50770	1,46038	1,42195	1,38976
	0,0017	2,01120	1,85589	1,73419	1,63899	1,56443	1,50571	1,45892	1,42091	1,38913
	0,0000	2,00421	1,85033	1,72981	1,63558	1,56182	1,50374	1,45748	1,41988	1,38844
2,3	0,0067	2,11639	1,95442	1,82208	1,71688	1,63348	1,56699	1,51335	1,46926	1,43181
	0,0050	2,11230	1,94917	1,81751	1,71327	1,63069	1,56487	1,51177	1,46814	1,43119
	0,0033	2,10754	1,94364	1,81294	1,70969	1,62793	1,56276	1,51021	1,46703	1,43055
	0,0017	2,10183	1,93790	1,80840	1,70614	1,62519	1,56068	1,50866	1,46591	1,42985
	0,0000	2,09470	1,93220	1,80389	1,70261	1,62247	1,55863	1,50714	1,46481	1,42909
2,4	0,0067	2,20735	2,03682	1,89666	1,78436	1,69454	1,62224	1,56334	1,51448	1,47269
	0,0050	2,20316	2,03145	1,89197	1,78064	1,69165	1,62002	1,56168	1,51330	1,47203
	0,0033	2,19830	2,02579	1,88727	1,77694	1,68878	1,61783	1,56003	1,51211	1,47133
	0,0017	2,19247	2,01991	1,88260	1,77328	1,68594	1,61566	1,55841	1,51092	1,47058
	0,0000	2,18518	2,01408	1,87797	1,76964	1,68312	1,61351	1,55679	1,50975	1,46975
2,5	0,0067	2,29831	2,11923	1,97124	1,85184	1,75560	1,67748	1,61333	1,55971	1,51357
	0,0050	2,29403	2,11373	1,96642	1,84801	1,75261	1,67518	1,61159	1,55846	1,51286
	0,0033	2,28906	2,10793	1,96160	1,84420	1,74964	1,67289	1,60986	1,55719	1,51211
	0,0017	2,28310	2,10192	1,95681	1,84042	1,74669	1,67063	1,60815	1,55593	1,51130
	0,0000	2,27567	2,09595	1,95206	1,83668	1,74378	1,66839	1,60645	1,55468	1,51041

5. $a=0,5$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
0,5	0,0067	0,38291	0,52984	0,60956	0,64666	0,63879	0,56991	0,42776	0,24285	0,08468
	0,0050	0,23699	0,33738	0,39813	0,43187	0,43859	0,41163	0,33360	0,20513	0,07574
	0,0033	0,14327	0,21221	0,25805	0,28610	0,29719	0,28916	0,25398	0,17412	0,07008
	0,0017	0,08342	0,13149	0,16597	0,18823	0,19942	0,19931	0,18458	0,14656	0,06848
	0,0000	0,04500	0,08013	0,10585	0,12307	0,13281	0,13555	0,13021	0,11277	0,07452
0,6	0,0067	0,45844	0,63285	0,72486	0,76366	0,74735	0,65991	0,49080	0,27680	0,09615
	0,0050	0,28402	0,40364	0,47463	0,51174	0,51509	0,47800	0,38310	0,23360	0,08583
	0,0033	0,17183	0,25421	0,30830	0,34010	0,35044	0,33716	0,29223	0,19812	0,07922
	0,0017	0,10009	0,15765	0,19864	0,22440	0,23609	0,23348	0,21324	0,16673	0,07714
	0,0000	0,05400	0,09613	0,12685	0,14707	0,15781	0,15955	0,15121	0,12877	0,08352
0,7	0,0067	0,53397	0,73587	0,84015	0,88066	0,85591	0,74991	0,55384	0,31076	0,10763
	0,0050	0,33106	0,46990	0,55113	0,59162	0,59159	0,54438	0,43260	0,26207	0,09593
	0,0033	0,20038	0,29621	0,35855	0,39410	0,40369	0,38516	0,33048	0,22212	0,08836
	0,0017	0,11675	0,18382	0,23130	0,26056	0,27276	0,26764	0,24191	0,18690	0,08581
	0,0000	0,06300	0,11213	0,14785	0,17107	0,18281	0,18355	0,17221	0,14477	0,09252

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
0,8	0,0067	0,60951	0,83888	0,95544	0,99766	0,96447	0,83991	0,61688	0,34472	0,11910
	0,0050	0,37810	0,53616	0,62763	0,67149	0,66809	0,61075	0,48210	0,29053	0,10602
	0,0033	0,22894	0,33821	0,40880	0,44810	0,45694	0,43316	0,36873	0,24612	0,09750
	0,0017	0,13342	0,20999	0,26397	0,29673	0,30942	0,30181	0,27058	0,20706	0,09448
	0,0000	0,07200	0,12813	0,16885	0,19507	0,20781	0,20755	0,19321	0,16077	0,10152
0,9	0,0067	0,68504	0,94189	1,07074	1,11466	1,07304	0,92991	0,67992	0,37867	0,13057
	0,0050	0,42513	0,60242	0,70413	0,75137	0,74459	0,67713	0,53160	0,31900	0,11611
	0,0033	0,25749	0,38021	0,45905	0,50210	0,51019	0,48116	0,40698	0,27012	0,10663
	0,0017	0,15009	0,23615	0,29664	0,33290	0,34609	0,33598	0,29924	0,22723	0,10314
	0,0000	0,08100	0,14413	0,18985	0,21907	0,23281	0,23155	0,21421	0,17677	0,11052

$a=0,7$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
0,5	0,0067	0,38502	0,53575	0,62280	0,67132	0,67718	0,61788	0,47278	0,27207	0,09561
	0,0050	0,23771	0,33982	0,40438	0,44487	0,46102	0,44353	0,36803	0,23025	0,08585
	0,0033	0,14347	0,21309	0,26077	0,29254	0,30957	0,30883	0,27907	0,19577	0,07983
	0,0017	0,08346	0,13175	0,16702	0,19119	0,20586	0,21070	0,20108	0,16486	0,07854
	0,0000	0,04501	0,08018	0,10619	0,12430	0,13594	0,14177	0,14029	0,12588	0,08633
0,6	0,0067	0,46055	0,63876	0,73810	0,78832	0,78574	0,70788	0,53582	0,30603	0,10708
	0,0050	0,28474	0,40608	0,48088	0,52474	0,53752	0,50990	0,41753	0,25872	0,09594
	0,0033	0,17203	0,25509	0,31102	0,34654	0,36282	0,35683	0,31732	0,21977	0,08897
	0,0017	0,10012	0,15791	0,19969	0,22736	0,24252	0,24487	0,22974	0,18502	0,08720
	0,0000	0,05401	0,09618	0,12719	0,14830	0,16094	0,16577	0,16129	0,14188	0,09533
0,7	0,0067	0,53608	0,74178	0,85339	0,90532	0,89430	0,79788	0,59886	0,33999	0,11855
	0,0050	0,33178	0,47234	0,55738	0,60462	0,61402	0,57628	0,46703	0,28718	0,10604
	0,0033	0,20058	0,29709	0,36127	0,40054	0,41607	0,40483	0,35557	0,24377	0,09811
	0,0017	0,11679	0,18408	0,23236	0,26352	0,27919	0,27903	0,25841	0,20519	0,09587
	0,0000	0,06301	0,11218	0,14819	0,17230	0,18594	0,18977	0,18229	0,15788	0,10433
0,8	0,0067	0,61161	0,84479	0,96868	1,02232	1,00286	0,88788	0,66190	0,37394	0,13003
	0,0050	0,37882	0,53860	0,63388	0,68449	0,69052	0,64265	0,51653	0,31565	0,11613
	0,0033	0,22914	0,33909	0,41152	0,45454	0,46932	0,45283	0,39382	0,26777	0,10725
	0,0017	0,13346	0,21025	0,26502	0,29969	0,31586	0,31320	0,28708	0,22536	0,10454
	0,0000	0,07201	0,12818	0,16919	0,19630	0,21094	0,21377	0,20329	0,17388	0,11333
0,9	0,0067	0,68714	0,94780	1,08398	1,13932	1,11143	0,97788	0,72494	0,40790	0,14150
	0,0050	0,42586	0,60485	0,71038	0,76437	0,76702	0,70903	0,56603	0,34412	0,12622
	0,0033	0,25769	0,38109	0,46177	0,50854	0,52257	0,50083	0,43207	0,29177	0,11639
	0,0017	0,15012	0,23641	0,29769	0,33586	0,35252	0,34737	0,31574	0,24552	0,11320
	0,0000	0,08101	0,14418	0,19019	0,22030	0,23594	0,23777	0,22429	0,18988	0,12233

$a=0,9$

b	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
0,5	0,0067	0,38712	0,54166	0,63604	0,69599	0,71557	0,66584	0,51780	0,30130	0,10654
	0,0050	0,23843	0,34225	0,41064	0,45786	0,48346	0,47543	0,40247	0,25537	0,09596
	0,0033	0,14367	0,21397	0,26349	0,29897	0,32195	0,32849	0,30416	0,21742	0,08959
	0,0017	0,08349	0,13201	0,16808	0,19415	0,21229	0,22209	0,21757	0,18315	0,08859
	0,0000	0,04501	0,08023	0,10653	0,12553	0,13906	0,14799	0,15038	0,15898	0,09814
0,6	0,0067	0,46265	0,64468	0,75134	0,81299	0,82413	0,75584	0,58084	0,33525	0,11801
	0,0050	0,28546	0,40851	0,48714	0,53774	0,55996	0,54180	0,45197	0,28383	0,10605
	0,0033	0,17222	0,25597	0,31374	0,35297	0,37520	0,37649	0,34241	0,24142	0,09873
	0,0017	0,10016	0,15818	0,20075	0,23032	0,24896	0,25626	0,24624	0,20331	0,09726
	0,0000	0,05401	0,09623	0,12753	0,14953	0,16406	0,17199	0,17138	0,15498	0,10714
0,7	0,0067	0,53818	0,74769	0,86663	0,92999	0,93269	0,84584	0,64388	0,36921	0,12948
	0,0050	0,33250	0,47477	0,56364	0,61761	0,63646	0,60818	0,50147	0,31230	0,11615
	0,0033	0,20078	0,29797	0,36399	0,40697	0,42845	0,42449	0,38066	0,26542	0,10786
	0,0017	0,11683	0,18434	0,23341	0,26648	0,28563	0,29043	0,27491	0,22348	0,10593
	0,0000	0,06301	0,11223	0,14853	0,17353	0,18906	0,19599	0,19238	0,17098	0,11614
0,8	0,0067	0,61371	0,85070	0,98192	1,04699	1,04125	0,93584	0,70692	0,40317	0,14095
	0,0050	0,37954	0,54103	0,64014	0,69749	0,71296	0,67455	0,55097	0,34077	0,12624
	0,0033	0,22933	0,33997	0,41424	0,46097	0,48170	0,47249	0,41891	0,28942	0,11700
	0,0017	0,13349	0,21051	0,26608	0,30265	0,32229	0,32459	0,30357	0,24365	0,11459
	0,0000	0,07201	0,12823	0,16953	0,19753	0,21406	0,21999	0,21338	0,18698	0,12514
0,9	0,0067	0,68924	0,95371	1,09721	1,16399	1,14982	1,02584	0,76996	0,43712	0,15243
	0,0050	0,42658	0,60729	0,71664	0,77736	0,78946	0,74093	0,60047	0,36924	0,13633
	0,0033	0,25789	0,38197	0,46449	0,51497	0,53495	0,52049	0,45716	0,31342	0,12614
	0,0017	0,15016	0,23668	0,29875	0,33882	0,35896	0,35876	0,33224	0,29381	0,12326
	0,0000	0,08101	0,14423	0,19053	0,22153	0,23906	0,24399	0,23438	0,20298	0,13414

6.

a	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
0,00	0,0067	0,03242	0,06461	0,10306	0,14174	0,18856	0,23513	0,28933	0,34111	0,39641
	0,0050	0,02994	0,06484	0,09928	0,14129	0,18421	0,23583	0,28605	0,34283	0,39618
	0,0033	0,03073	0,05988	0,09895	0,13868	0,18363	0,22975	0,28803	0,34235	0,39763
	0,0017	0,02125	0,06145	0,09850	0,13645	0,17885	0,23080	0,28065	0,34525	0,40405
	0,0000	0,02210	0,04250	0,10080	0,15450	0,17210	0,20320	0,28950	0,35810	0,40100
0,02	0,0067	0,03492	0,07086	0,11306	0,14549	0,20356	0,23138	0,29933	0,33486	0,39891
	0,0050	0,03494	0,06984	0,10678	0,15629	0,18421	0,25083	0,27855	0,34783	0,39118
	0,0033	0,03073	0,06988	0,10895	0,14368	0,20363	0,22475	0,29803	0,33235	0,39763
	0,0017	0,03125	0,06145	0,10850	0,15645	0,17885	0,25080	0,27065	0,34525	0,39405
	0,0000	0,02210	0,06250	0,10080	0,15450	0,21210	0,20320	0,28950	0,33810	0,40100
0,04	0,0067	0,03742	0,07711	0,12306	0,14924	0,21856	0,22763	0,30933	0,32861	0,40141
	0,0050	0,03994	0,07484	0,11428	0,17129	0,18421	0,26583	0,27105	0,35283	0,38618
	0,0033	0,03073	0,07988	0,11895	0,14869	0,22363	0,21975	0,30803	0,32235	0,39763
	0,0017	0,04125	0,06145	0,11850	0,17645	0,17885	0,27080	0,26065	0,34525	0,38405
	0,0000	0,02210	0,08250	0,10080	0,15450	0,25210	0,20320	0,28950	0,31810	0,40100

a	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
0,06	0,0067	0,03992	0,08336	0,13306	0,15299	0,23356	0,22388	0,31933	0,32236	0,40391
	0,0050	0,04494	0,07984	0,12178	0,18629	0,18421	0,28083	0,26355	0,35783	0,38118
	0,0033	0,03073	0,08988	0,12895	0,15368	0,24363	0,21475	0,31803	0,31235	0,39763
	0,0017	0,05125	0,06145	0,12850	0,19645	0,17885	0,29080	0,25065	0,34525	0,37405
	0,0000	0,02210	0,10250	0,10080	0,15450	0,29210	0,20320	0,28950	0,29810	0,40100
0,08	0,0067	0,04242	0,08961	0,14306	0,15674	0,24856	0,22013	0,32933	0,31611	0,40641
	0,0050	0,04994	0,08484	0,12928	0,20129	0,18421	0,29583	0,25605	0,36283	0,37618
	0,0033	0,03073	0,09988	0,13895	0,15868	0,26363	0,20975	0,32803	0,30235	0,39763
	0,0017	0,06125	0,06145	0,13850	0,21645	0,17885	0,31080	0,24065	0,34525	0,36405
	0,0000	0,02210	0,12250	0,10080	0,15450	0,33210	0,20320	0,28950	0,27810	0,40100
1,00	0,0067	0,04492	0,09566	0,15306	0,16049	0,26356	0,21638	0,33933	0,30986	0,40891
	0,0050	0,05494	0,08984	0,13678	0,21629	0,18421	0,31083	0,24855	0,36783	0,37118
	0,0033	0,03073	0,10987	0,14895	0,16368	0,28363	0,20475	0,33803	0,29235	0,39763
	0,0017	0,07125	0,06145	0,14850	0,23645	0,17885	0,33080	0,23065	0,34525	0,35405
	0,0000	0,02210	0,14250	0,10080	0,15450	0,37210	0,20320	0,28950	0,25810	0,40100

§ 7

1.

a	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
1,1	0,5	0,10495	0,17858	0,19471	0,13668	0,00050	—0,13813	—0,19538	—0,17880	-0,10498
	0,4	0,20282	0,37577	0,49207	0,53091	0,47983	0,33643	0,17490	0,07496	0,02370
	0,3	0,27083	0,51631	0,71197	0,83522	0,86684	0,79287	0,60677	0,37740	0,17993
	0,2	0,31349	0,60703	0,85946	1,04790	1,14825	1,13718	0,99537	0,71175	0,35370
	0,1	0,33620	0,65664	0,94296	1,17250	1,31824	1,35075	1,24216	0,97167	0,53181
	0,0	0,34315	0,67213	0,96967	1,21330	1,37500	1,42322	1,32705	1,06222	0,61797
1,2	0,5	0,11450	0,19484	0,21245	0,14916	0,00060	—0,15049	—0,21298	—0,19493	-0,11446
	0,4	0,21174	0,39181	0,51186	0,54985	0,49262	0,33768	0,16598	0,06374	0,01638
	0,3	0,27731	0,52876	0,72921	0,85532	0,88693	0,80909	0,61439	0,37729	0,17820
	0,2	0,31702	0,61471	0,87222	1,06630	1,17180	1,16365	1,02040	0,72885	0,36091
	0,1	0,33740	0,66048	0,95179	1,18869	1,34301	1,38310	1,27811	1,00402	0,55065
	0,0	0,34346	0,67448	0,97695	1,22851	1,40000	1,45747	1,36673	1,09991	0,64311
1,3	0,5	0,12406	0,21111	0,23019	0,16163	0,00069	—0,16285	—0,23057	—0,21106	-0,12394
	0,4	0,22065	0,40786	0,53166	0,56879	0,50540	0,33892	0,15707	0,05253	0,00906
	0,3	0,28380	0,54120	0,74646	0,87542	0,90702	0,82531	0,62202	0,37718	0,17646
	0,2	0,32055	0,62240	0,88497	1,08469	1,19534	1,19012	1,04543	0,74595	0,36813
	0,1	0,33860	0,66432	0,96063	1,20488	1,36778	1,41546	1,31405	1,03638	0,56949
	0,0	0,34377	0,67683	0,98423	1,24372	1,42500	1,49172	1,40640	1,13759	0,66825
1,4	0,5	0,13361	0,22737	0,24793	0,17411	0,00079	—0,17521	—0,24816	—0,22719	-0,13342
	0,4	0,22957	0,42390	0,55145	0,58773	0,51818	0,34017	0,14815	0,04131	0,00173
	0,3	0,29029	0,55364	0,76370	0,89553	0,92712	0,84154	0,62964	0,37707	0,17473
	0,2	0,32408	0,63009	0,89772	1,10308	1,21888	1,21659	1,07046	0,76306	0,37534
	0,1	0,33980	0,66815	0,96947	1,22108	1,39255	1,44781	1,35000	1,06873	0,58833
	0,0	0,34408	0,67918	0,99151	1,25894	1,45000	1,52597	1,44607	1,17528	0,69339
1,5	0,5	0,14317	0,24364	0,26568	0,18658	0,00089	—0,18756	—0,26575	—0,24332	—0,14289
	0,4	0,23848	0,43994	0,57124	0,60668	0,53097	0,34142	0,13923	0,03010	—0,00559
	0,3	0,29677	0,56609	0,78094	0,91563	0,94721	0,85776	0,63727	0,37696	0,17299
	0,2	0,32761	0,63777	0,91047	1,12147	1,24243	1,24306	1,09549	0,78016	0,38256
	0,1	0,34100	0,67199	0,97830	1,23727	1,41732	1,48016	1,38595	1,10108	0,60717
	0,0	0,34439	0,68153	0,99879	1,27415	1,47500	1,56022	1,48575	1,21296	0,71853

2.

a	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
0,975	0,5	0,08071	0,02200	0,06760	0,02070	0,02950	—0,01500	0,01590	—0,03120	0,00191
	0,4	0,02391	0,11710	0,05860	0,08210	0,03520	0,06610	0,02140	0,03980	0,04951
	0,3	0,03640	0,06051	0,13160	0,07310	0,11870	0,07160	0,09000	0,10211	0,03790
	0,2	0,03660	0,05090	0,07501	0,16820	0,10949	0,14260	0,15231	0,08810	0,05260
	0,1	0,01450	0,05110	0,08749	0,11140	0,19211	0,19020	0,14070	0,10280	0,05020
	0,0	0,01450	0,05110	0,08749	0,11140	0,19211	0,19020	0,14070	0,10280	0,05020
1,000	0,5	0,07578	0,02462	0,06867	0,01963	0,03057	—0,01607	0,01697	—0,02998	—0,00302
	0,4	0,02160	0,11448	0,06122	0,08317	0,03413	0,06717	0,02262	0,03858	0,04580
	0,3	0,03870	0,05820	0,12898	0,07572	0,11977	0,07282	0,08878	0,09840	0,04160
	0,2	0,03660	0,05320	0,07270	0,16558	0,11442	0,14138	0,14860	0,09180	0,05260
	0,1	0,01450	0,05110	0,08980	0,11140	0,18718	0,19020	0,14440	0,10280	0,05020
	0,0	0,01450	0,05110	0,08980	0,11140	0,18718	0,19020	0,14440	0,10280	0,05020
1,025	0,5	0,07110	0,02700	0,07000	0,01830	0,03190	—0,01740	0,01830	—0,02900	—0,00770
	0,4	0,01930	0,11210	0,06360	0,08450	0,03280	0,06850	0,02360	0,03760	0,04210
	0,3	0,04100	0,05590	0,12660	0,07810	0,12110	0,07380	0,08780	0,09470	0,04530
	0,2	0,03660	0,05550	0,07040	0,16320	0,11910	0,14040	0,14490	0,09550	0,05260
	0,1	0,01450	0,05110	0,09210	0,11140	0,18250	0,19020	0,14810	0,10280	0,05020
	0,0	0,01450	0,05110	0,09210	0,11140	0,18250	0,19020	0,14810	0,10280	0,05020
1,050	0,5	0,06665	0,02915	0,07155	0,01675	0,03345	—0,01895	0,01985	—0,02825	—0,01215
	0,4	0,01700	0,10995	0,06575	0,08605	0,03125	0,07005	0,02435	0,03685	0,03840
	0,3	0,04330	0,05360	0,12445	0,08025	0,12265	0,07455	0,08705	0,09100	0,04900
	0,2	0,03660	0,05780	0,06810	0,16105	0,12355	0,13965	0,14120	0,09920	0,05260
	0,1	0,01450	0,05110	0,09440	0,11140	0,17805	0,19020	0,15180	0,10280	0,05020
	0,0	0,01450	0,05110	0,09440	0,11140	0,17805	0,19020	0,15180	0,10280	0,05020

3.

a	t	u_{1j}	u_{2j}	u_{3j}	u_{4j}	u_{5j}	u_{6j}	u_{7j}	u_{8j}	u_{9j}
1,1	0,5	0,07048	−0,01968	0,11225	0,01115	0,19437	0,11715	0,22202	0,07792	0,20338
	0,4	0,00770	0,07794	0,02317	0,22655	0,12125	0,22802	0,11400	0,21971	0,14020
	0,3	0,00746	0,05055	0,19224	0,13327	0,26020	0,11810	0,22571	0,17628	0,13633
	0,2	0,04285	0,12176	0,16065	0,22589	0,13012	0,25789	0,18038	0,14233	0,15608
	0,1	0,11430	0,15295	0,15541	0,15750	0,22358	0,19240	0,17451	0,16018	0,12600
	0,0	0,11010	0,14795	0,14980	0,15310	0,21978	0,14020	0,17220	0,15818	0,12410
1,2	0,5	0,09046	−0,03966	0,11950	0,01900	0,18724	0,12500	0,22834	0,05794	0,22336
	0,4	0,00770	0,08498	0,01664	0,23380	0,12910	0,23434	0,10840	0,22552	0,14020
	0,3	−0,00548	0,06400	0,19928	0,12674	0,28090	0,11250	0,23152	0,19066	0,12216
	0,2	0,05630	0,10882	0,17410	0,24638	0,11014	0,27808	0,19476	0,12816	0,17046
	0,1	0,11430	0,16640	0,15592	0,15750	0,24356	0,19240	0,17472	0,17456	0,12600
	0,0	0,11010	0,16140	0,14980	0,15310	0,23976	0,14020	0,17220	0,17256	0,12410
1,3	0,5	0,11044	−0,05964	0,12675	0,02685	0,18011	0,13285	0,23466	0,03796	0,24334
	0,4	0,00770	0,09202	0,01011	0,24105	0,13695	0,24066	0,10280	0,23133	0,14020
	0,3	−0,01842	0,07745	0,20632	0,12021	0,30160	0,10690	0,23733	0,20504	0,10799
	0,2	0,06975	0,09588	0,18755	0,26687	0,09016	0,29827	0,20914	0,11399	0,18484
	0,1	0,11430	0,17985	0,15643	0,15750	0,26354	0,19240	0,17493	0,18894	0,12600
	0,0	0,11010	0,17485	0,14980	0,15310	0,25974	0,14020	0,17220	0,18694	0,12410
1,4	0,5	0,13042	−0,07962	0,13400	0,03470	0,17298	0,14070	0,24098	0,01798	0,26332
	0,4	0,00770	0,09906	0,00358	0,24830	0,14480	0,24698	0,09720	0,23714	0,14020
	0,3	−0,03136	0,09090	0,21336	0,11368	0,32230	0,10130	0,24314	0,21942	0,09382
	0,2	0,08320	0,08294	0,20100	0,28736	0,07018	0,31846	0,22352	0,09982	0,19922
	0,1	0,11430	0,19330	0,15694	0,15750	0,28352	0,19240	0,17514	0,20332	0,12600
	0,0	0,11010	0,18830	0,14980	0,15310	0,27972	0,14020	0,17220	0,20132	0,12410
1,5	0,5	0,05040	−0,09960	0,14125	0,04255	0,16585	0,14855	0,24730	−0,00200	0,28330
	0,4	0,00770	0,10610	−0,00295	0,25555	0,15265	0,25330	0,09160	0,24295	0,14020
	0,3	−0,04430	0,10435	0,22040	0,10715	0,34300	0,09570	0,24895	0,23380	0,07965
	0,2	0,09665	0,07000	0,21445	0,30785	0,05020	0,33865	0,23790	0,08565	0,21360
	0,1	0,11430	0,20675	0,15745	0,15750	0,30350	0,19240	0,17535	0,21770	0,12600
	0,0	0,11010	0,20175	0,14980	0,15310	0,29970	0,14020	0,17220	0,21570	0,12410

§ 10

1. а) $y(x) = (1 + c_1)x + c_2x^3 + c_3x^5$

c_i \ a	0,6	0,8	1,0	1,2
c_1	0,427483	0,664348	1,000000	1,526101
c_2	—0,005122	—0,007058	0	0,036078
c_3	0,000062	0,000155	0	—0,001916

б) $y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + c_1x + c_2x^3 + c_3x^5$

c_i \ a	0,6	0,8	1,0	1,2
c_1	0,855724	1,331451	2,007941	3,072572
c_2	—0,006658	—0,005649	0,016519	0,100953
c_3	0,000052	0,000003	—0,000955	—0,006286

2. а) $y(x) = \frac{1}{x} + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$

c_i \ a	0,2	0,3	0,4	—0,2	—0,3	—0,4
c_1	0,341729	0,554051	0,807688	—0,269770	—0,386253	—0,493295
c_2	0,019894	0,049588	0,098885	0,014340	0,030148	0,050273
c_3	0,000953	0,003613	0,009735	—0,000652	—0,002027	—0,004446

б) $y(x) = 1 + (c_1 - 1)x + c_2x^2 + c_3x^3$

c_i \ a	0,2	0,3	0,4	—0,2	—0,3	—0,4
c_1	0,056942	0,092291	0,134476	—0,044954	—0,064352	—0,082168
c_2	0,003204	0,008008	0,016014	0,002278	0,004772	0,007926
c_3	0,000140	0,000539	0,001472	—0,000090	—0,000275	—0,000592

в) $y(x) = e^{-x} + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$

c_i \ a	0,2	0,3	0,4	—0,2	—0,3	—0,4
c_1	0,097506	0,160772	0,241919	—0,075946	—0,107094	—0,132584
c_2	0,006462	0,016251	0,033250	0,004790	0,009970	0,016080
c_3	0,008053	0,027321	0,065242	—0,007962	—0,026805	—0,063354

3. а) $y(x)=1+(1+c_1)x+c_2x^2+c_3x^3$

c_i \ a	0,1	0,2	−0,1	−0,2
c_1	1,234211	1,220339	1,267860	1,287972
c_2	−0,044174	−0,087267	0,045492	0,092565
c_3	0,002587	0,010215	0,002668	0,010869

б) $y(x)=e^{-x}+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$

c_i \ a	0,1	0,2	−0,1	−0,2
c_1	0,391753	0,387700	0,401505	0,407300
c_2	−0,012803	−0,025290	0,013185	0,026826
c_3	0,000713	0,002813	0,000736	0,003003

в) $y(x)=\sqrt{x}+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$

c_i \ a	0,1	0,2	−0,1	−0,2
c_1	0,592322	0,585581	0,608689	0,618477
c_2	−0,021485	−0,042445	0,022126	0,045022
c_3	0,001265	0,004995	0,001304	0,005313

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 1, изд. 3-е, «Наука», 1966.
2. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, изд. 2-е, Физматгиз, 1962.
3. Большев Л. И., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, «Наука», 1965.
4. Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболь И. М., Срагович В. Г., Шрейдер Ю. А., Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), СМБ, Физматгиз, 1962.
5. Вазов В., Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, 1963.
6. Вентцель Е. С., Теория вероятностей, «Наука», 1969.
7. Виленкин Н. Я., О приближенном вычислении кратных интегралов, сб. «Вычислительная математика», вып. V, М., 1959.
8. Гавурин М. К., Применение полиномов наилучшего приближения к улучшению сходимости итеративных процессов, УМН 5, 3 (37) (1950).
9. Гавурин М. К., Лекции по методам вычислений, «Наука», 1971.
10. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, «Наука», 1969.
11. Гутер Р. С., Овчинский Б. В., Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта, «Наука», 1970.
12. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, «Наука», 1970.
13. Демидович Б. П.. Марон И. А., Шувалова Э. З., Численные методы анализа, «Наука», 1968.
14. Каган Б. М. и Тер-Микаэлян Т. М., Решение инженерных задач на автоматических цифровых вычислительных машинах, Госэнергоиздат, 1958.
15. Кадыров М., Таблицы случайных чисел, Изд-во Среднеазиатского гос. университета, Ташкент, 1936.
16. Канторович Л. В., О методе Ньютона, Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, т. XXVIII, М.—Л., 1949.
17. Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962.
18. Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953.
19. Кронрод А. С., Узлы и веса квадратурных формул, «Наука», 1964.
20. Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1954.
21. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, Физматгиз, 1959.
22. Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, «Наука», 1966.
23. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, 1951.

24. Люстерник Л. А., Некоторые кубатурные формулы для двукратных интегралов, ДАН СССР 62, 6 (1948), 449—459.
25. Люстерник Л. А., Червоненкис О. А., Янпольский А. Р., Математический анализ, вычисление элементарных функций, Физматгиз, 1963.
26. Мак-Кракен Д., Дорн У., Численные методы и программирование на ФОРТРАНе, ИЛ, 1963.
27. Микеладзе Ш. Е., Численные методы математического анализа, Гостехиздат, 1953.
28. Милн В. Э., Численный анализ, ИЛ, 1951.
29. Милн В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955.
30. Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.
31. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, СМБ, «Наука», 1965.
32. Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы математической физики, т. I, ИЛ, 1958.
33. Мысовских И. П., Лекции по методам вычислений, Физматгиз, 1962.
34. Островский А. М., Решение уравнений и систем уравнений, ИЛ, 1963.
35. Панов Д. Ю., Справочник по численному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, Гостехиздат, 1951.
36. Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1970.
37. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.
38. Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, «Наука», 1965.
39. Положий Г. Н., Пахарева Н. А., Степаненко И. З., Бондаренко П. С., Великоиваненко И. М., Математический практикум, Физматгиз, 1960.
40. Румшиский Л. З., Вычислительный лабораторный практикум, Физматгиз, 1963.
41. Румшиский Л. З., Математическая обработка результатов эксперимента, «Наука», 1971.
42. Сальвадори М. Дж., Численные методы в технике, ИЛ, 1955.
43. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, «Наука», 1971.
44. Сегал Б. И., Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, 1962.
45. Скарборо Дж., Численные методы математического анализа, ГТТИ, М., 1934.
46. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958.
47. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, М., Физматгиз, 1959.
48. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
49. Соболь И. М., Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара, «Наука», 1969.
50. Степанов В. Б., Курс дифференциальных уравнений, «Наука» 1966.
51. Стеффенсон И. Ф., Теория интерполяции, ГТТИ, М., 1935.
52. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
53. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
54. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1963.
55. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, «Наука», 1969.
56. Форсайт Дж., Моллер К., Численное решение систем линейных алгебраических уравнений, «Мир», 1969.

57. Черкасова М. П., Сборник задач по численным методам, «Высшая школа», Минск, 1967.
58. Щиголев Б. М., Математическая обработка наблюдений, «Наука», 1969.
59. Эльсгольц Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Гостехиздат, 1954.
60. Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1967.
61. Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИТЕРАТУРЫ ПО ГЛАВАМ

Глава I 1, 10, 11, 12, 40, 42, 44, 57.
Глава II 8, 12, 14, 25, 44, 47.
Глава III 2, 12, 26, 54, 56.
Глава IV 12, 16, 34.
Глава V 1, 11, 12, 51, 58.
Глава VI 12, 28, 41.
Глава VII 1, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 19, 21, 22, 24, 27, 28, 33, 49, 55, 61.
Глава VIII 2, 13, 18, 20, 26, 29, 36, 45, 50, 59.
Глава IX 2, 13, 18, 39.
Глава X 2, 5, 9, 13, 17, 18, 23, 26, 30, 31, 32, 35, 37, 38, 39, 42, 43, 46, 48, 52, 53, 60.

Наталья Васильевна КОПЧЕНОВА,
Исаак Абрамович МАРОН

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Издание третье,
стереотипное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 24.04.09.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 19,32. Тираж 2000 экз.

Заказ №   .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru